Università degli Studi di Firenze

Facoltà di Ingegneria - Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Elementi di progettazione strutturale

Prof.ssa Ing. Gloria Terenzi

30/05/2005

CENNI AL CALCOLO AGLI ELEMENTI FINITI

Ing. Leonardo Bandini

Modelli strutturali discreti

FEM - *Finite Elements Method ≈1950*– definizioni:

•Si schematizza il continuo con un “aggregato” discreto di elementi finiti.

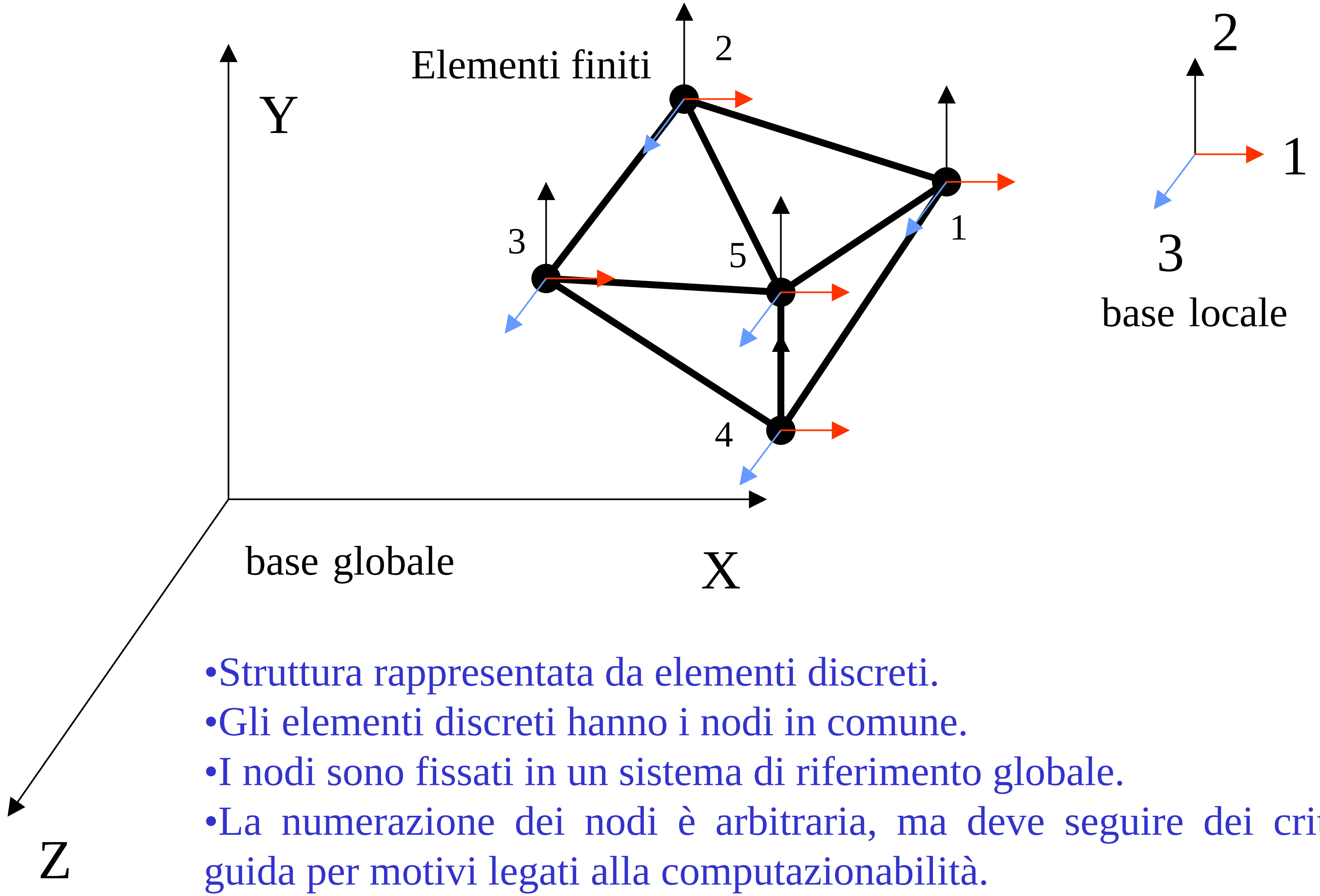
•Le variabili dei modelli strutturali sono definite solo in punti discreti*: “punti nodali”*.

•Le strutture sono un insieme arbitrariamente composto di elementi, ognuno dei quali è modellabile come un continuo.

•La determinazione del numero dei nodi dipende dal tipo di struttura e dal tipo dei carichi . Tutte le grandezze sono riferite solo nei nodi.

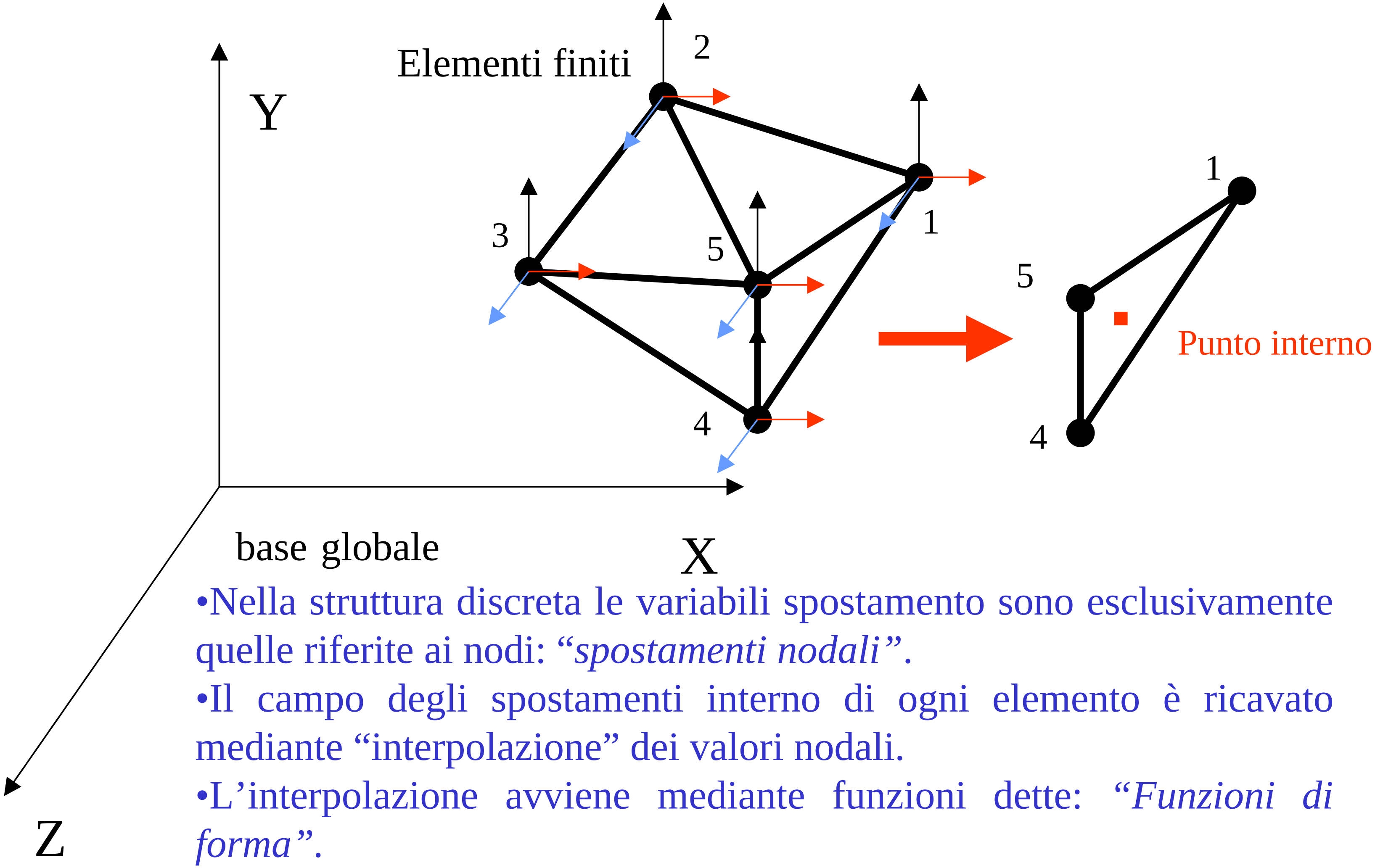
•Per definire la posizione dei punti nodali nello spazio si usa una “*base globale”*.

SCHEMATIZZAZIONE DI UNA STRUTTURA DISCRETA:



- Struttura rappresentata da elementi discreti.
- Gli elementi discreti hanno i nodi in comune.
- I nodi sono fissati in un sistema di riferimento globale.
- La numerazione dei nodi è arbitraria, ma deve seguire dei criteri guida per motivi legati alla computazionabilità.

SCHEMATIZZAZIONE DI UNA STRUTTURA DISCRETA:



•Nella struttura discreta le variabili spostamento sono esclusivamente quelle riferite ai nodi: “*spostamenti nodali*”.

•Il campo degli spostamenti interno di ogni elemento è ricavato mediante “interpolazione” dei valori nodali.

•L’interpolazione avviene mediante funzioni dette: *“Funzioni di forma”*.

•Ogni tipo di elemento ha la sua funzione di forma.

VARIABILI ESTERNE:

•Le “***variabili spostamenti esterni Vi***” sono date dai cosiddetti gradi di libertà *essenziali* dei punti nodali.

•Non prenderemo in considerazione gradi di libertà dipendenti dagli altri, ovvero, le variabili esterne saranno costituite da gradi di libertà linearmente indipendenti.

•Le “***variabili forze esterne Pi***” saranno quelle energeticamente corrisposte con le Vi, ovvero, energeticamente congruenti con gli spostamenti dei DOF essenziali.

•Tutti i Vi e le Pi sono numerate congruentemente, si possono raggruppare in colonne di valori (vettori per la base globale).

$$V = \begin{vmatrix} V_1 \\ \dots \\ V_n \end{vmatrix} \qquad P = \begin{vmatrix} P_1 \\ \dots \\ P_n \end{vmatrix}$$

•La dimensione del problema è *n* ovvero ho n DOF essenziali

•Lavoro delle variabili esterne: $\mathbf{W = P_1 x V_1 + \dots + P_n x V_n = P^T x V = V^T x P}$

VARIABILI INTERNE (PER OGNI ELEMENTO):

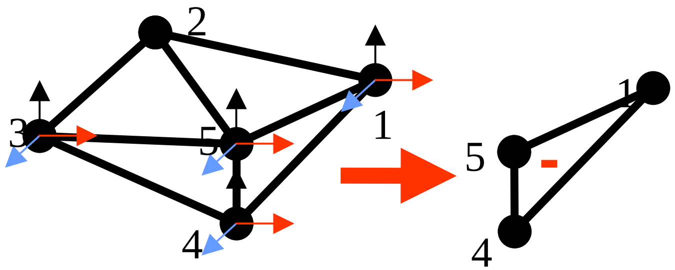
•Le “***variabili di stato interne*** $v^e i$” sono i possibili gradi di libertà dell’elemento. Sono riferite al sistema di riferimento locale.

•Le “***variabili forze interne*** $s^e i$” saranno quelle energeticamente corrisposte con le $v^e i$

$$v^e = \begin{vmatrix} v^e{}_1 \\ \dots \\ v^e{}_k \end{vmatrix} \qquad s^e = \begin{vmatrix} s^e{}_1 \\ \dots \\ s^e{}_k \end{vmatrix}$$

•La dimensione dei vettori è *k* ovvero ho k DOF possibili per l’elemento e-esimo.

•Lavoro delle variabili interne elemento e-esimo: $\mathbf{-W^e_{int} = s^{eT} \times v^e = v^{eT} \times s^e}$



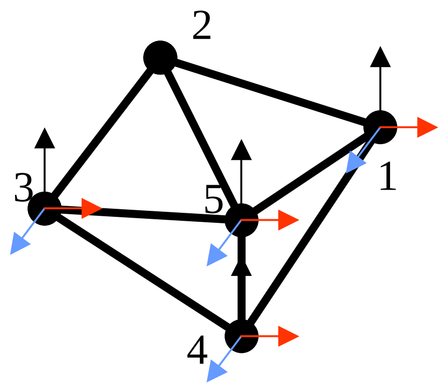
VARIABILI INTERNE (STRUTTURA COMPLETA):

•Si accorpano le variabili interne di tutti gli elementi che compongono la struttura.

$$v = \begin{vmatrix} v^1 \\ \dots \\ v^p \end{vmatrix} \qquad s = \begin{vmatrix} s^1 \\ \dots \\ s^p \end{vmatrix}$$

•Si hanno *p* elementi. La dimensione dei vettori è *p x ki* dove *ki* era la dimensione di ogni elemento.

•Lavoro delle variabili interne: $\mathbf{-W_{int} = s^T \times v = v^T \times s}$



EQUILIBRIO E CONGRUENZA:

•EQUAZIONI DI EQUILIBRIO:

le forze interne ed esterne devo potersi equilibrare, pertanto posso definire una matrice *b* tale che:

$$s = b \cdot P = \begin{vmatrix} s^1 \\ \ldots \\ s^l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & & \\ b_{l1} & & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_1 \\ \ldots \\ P_n \end{vmatrix}$$

•dimensioni:

n: numero di gradi di libertà essenziali

l: rapporto pxk_i

•La colonna j-esima di b contiene tutte le forze nodali interne corrispondenti allo stato di carico esterno Pj =1, P1…Pn = 0

EQUILIBRIO E CONGRUENZA:

•EQUAZIONI DI CONGRUENZA:

le variabili cinematiche interne sono connesse attraverso le equazioni di congruenza con le variabili cinematiche esterne

$$v = a \cdot V = \begin{vmatrix} v^1 \\ \dots \\ v^l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \\ a_{l1} & & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ \dots \\ V_n \end{vmatrix}$$

•dimensioni:

n: numero di gradi di libertà essenziali

l: rapporto pxk_i

•La colonna j-esima di a contiene tutte le variabili nodali interne corrispondenti allo stato di deformazione esterno Vj =1, V1…Vn = 0

EQUILIBRIO E CONGRUENZA:

- Principio dei lavori virtuali
- Teorema della dualità

↓

$$b^T = a^{-1},\ a^T = b^{-1}$$

EQUAZIONI COSTITUITIVE

•MATRICE DI FLESSIBILITA’ (scritta sul sistema di riferimento locale):

Consente, conoscendo le variabili forza interne di ogni elemento, di determinare le variabili spostamento interne all’elemento stesso.

$$v^e = f^e \cdot s^e + \bar{v}^e = \begin{vmatrix} v_1^e \\ \dots \\ v_k^e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1k} \\ \dots & & \\ f_{k1} & & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} s_1^e \\ \dots \\ s_k^e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{v}_1^e \\ \dots \\ \bar{v}_k^e \end{vmatrix}$$

•fij è lo spostamento del nodo i-esimo indotto dalla forza unitaria sj=1

•La matrice f è scritta sul sistema di riferimento locale dell’elemento e-esismo.

Spostamento nodale indotto da carichi non nodali (eg. temperatura…)

EQUAZIONI COSTITUITIVE

•MATRICE DI RIGIDEZZA (scritta sul sistema di riferimento locale):
Consente, conoscendo le variabili spostamento interne di ogni elemento, di determinare le variabili forza interne all’elemento stesso.

$$s^e = k^e \cdot v^e + \bar{s}^e = \begin{vmatrix} s_1^e \\ \dots \\ s_k^e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{11} & \dots & k_{1k} \\ \dots & & \\ k_{k1} & & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_1^e \\ \dots \\ v_k^e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{s}_1^e \\ \dots \\ \bar{s}_k^e \end{vmatrix}$$

•kij è la forza al nodo i compatibile con lo spostamento unitario del nodo j-esimo

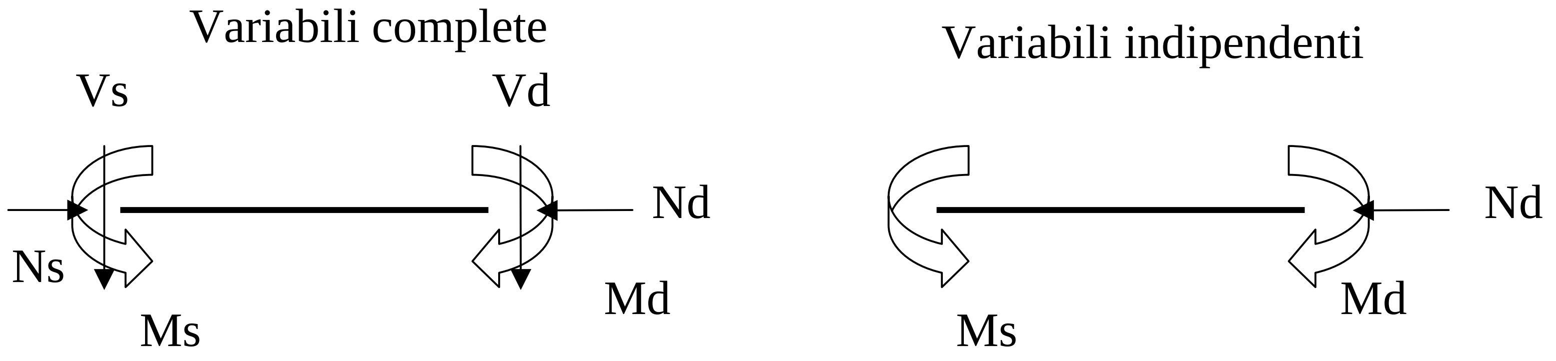
•La matrice k è scritta sul sistema di riferimento locale dell’elemento e-esismo.

Forze dovute ai carichi sugli elementi

EQUAZIONI COSTITUITIVE

•PROPRIETA’ DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA E DELLA MATRICE DI FLESSIBILITA’:

- •Quadrata (kxk)
- •Simmetrica
- •Regolare (se si considerano solo le variabili indipendenti), det ≠ 0
- •Definita positiva (se si considerano solo le variabili indipendenti)
- •Singolare (se si considerano le variabili complete) det = 0
- •Semi definita positiva (se si considerano le variabili complete)



SCHEMA DI TRASFORMAZIONE COMPLETO, variabili indipendenti: carichi

•Le relazioni precedenti erano scritte in un sistema di riferimento locale, per passare a quelle scritte rispetto ad un sistema di riferimento globale occorre utilizzare lo schema di trasformazione completo.

$$V = b^T \cdot v$$ Congruenza

$$v = f \cdot s + \bar{v}$$ Eq. costitutive

$$s = b \cdot P$$ Equilibrio

$$V = b^T \cdot f \cdot b \cdot P + b^T \cdot \bar{v} = F \cdot P + b^T \cdot \bar{v}$$

SCHEMA DI TRASFORMAZIONE COMPLETO, variabili indipendenti: spostamenti

•Le relazioni precedenti erano scritte in un sistema di riferimento locale, per passare a quelle scritte rispetto ad un sistema di riferimento globale occorre utilizzare lo schema di trasformazione completo.

$$P = a^T \cdot s$$ Equilibrio

$$s = k \cdot v + \bar{s}$$ Eq. costitutive

$$v = a \cdot V$$ congruenza

$$P = a^T \cdot k \cdot a \cdot V + a^T \cdot \bar{s} = K \cdot V + a^T \cdot \bar{s}$$

PROPRIETA’ DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA

$$K = a^T \cdot k \cdot a$$

E’ la matrice di rigidezza espressa nel sistema di riferimento globale, ed ha le seguenti caratteristiche:

- Quadrata
- Simmetrica
- Regolare detK $\neq 0$, quindi invertibile K = F^{-1}
- Definita positiva

Se la struttura è suscettibile di atti di moto rigido

- Singolare detK =0,
- Semi definita positiva

FUNZIONI DI FORMA

L’analisi computazionale ha sviluppato una moltitudine di elementi finiti, ogni elemento è caratterizzato da una funzione di forma, ovvero, una funzione che descrive le sue quantità cinematiche.

$$u^e = \phi^e \cdot \hat{u}^e \qquad v^e = \hat{\phi}^e \cdot \hat{u}^e$$

Dove,

u^e : campo degli spostamenti approssimato dell’elemento

$\hat{u}^e$: spostamenti nodali

ϕ^e : matrice di approssimazione

v^e : gradi di libertà dell’elemento

$\hat{\phi}^e$: matrice che imprime le condizioni nodali al contorno

Matrice delle funzioni di forma dell’elemento

$$\hat{u}^e = \left(\hat{\phi}^e\right)^{-1} \cdot v^e \Rightarrow u^e = \phi^e \cdot \left(\hat{\phi}^e\right)^{-1} \cdot v^e = \Omega^e \cdot v^e$$

FUNZIONI DI FORMA

L’analisi computazionale ha sviluppato una moltitudine di elementi finiti, ogni elemento è caratterizzato da una funzione di forma, ovvero, una funzione che descrive le sue quantità cinematiche.

Condizioni fondamentali:

1. Ogni colonna della matrice $\hat{\phi}^e$ deve essere lineare indipendente ai fini dell’inversione

2. Le funzioni forma devono essere continue e differenziabili un numero di volte pari all’ordine della funzione stessa

Criteri di convergenza – condizioni di completezza:

A. Rappresentazione dello stato di deformazione costante (stato base)

B. Invarianza nei confronti degli atti di moto rigido

Criteri di convergenza – conformità:

C. Condizioni di raccordo della deformazione al contorno, congruenza tra un elemento e quello adiacente connesso.

MATRICE DI RIGIDEZZA

Applicando un operatore differenziale discreto alla matrice della funzione di forma si può risalire alla matrice di rigidezza elastica:

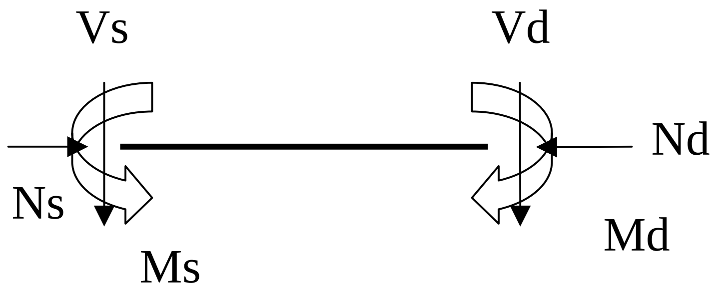
$$\varepsilon^e = D_k \cdot u^e = D_k \cdot \Omega^e \cdot v^e = H^e \cdot v^e$$

Operatore cinematico discreto

Attraverso l’integrazione dell’operatore differenziale discreto si arriva alla formulazione della matrice di rigidezza elastica dell’elemento.

MATRICE DI RIGIDEZZA ELEMENTO E-ESIMO, metodo diretto della rigidezza:

Esempio elemento trave piano con variabili complete:



$$
\begin{vmatrix} N_s \\ V_s \\ M_s \\ N_d \\ V_d \\ M_d \end{vmatrix} =
\begin{vmatrix}
EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\
 & 12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 & 0 & -12EJ/l^3 & 6EJ/l^2 \\
 & & 4EJ/l & 0 & -6EJ/l^2 & 2EJ/l \\
 & & & EA/l & 0 & 0 \\
 & & & & 12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 \\
 & & & & & 4EJ/l
\end{vmatrix} \cdot
\begin{vmatrix} u_s \\ w_s \\ \varphi_s \\ u_d \\ w_d \\ \phi_d \end{vmatrix}
$$

K_{ij} **Forza al nodo i compatibile con lo spostamento del grado di libertà j-esimo**

MATRICE DI RIGIDEZZA:

Qualunque sia il metodo per la determinazione della matrice delle rigidezze, essa rappresenta una proprietà intrinseca della struttura (del modello).

Ogni matrice di rigidezza degli elementi utilizzati nella discretizzazione, è scritta nel sistema di riferimento locale di ogni elemento, essa va “*tradotta*” in un sistema di riferimento globale.

Ogni matrice di rigidezza degli elementi utilizzati, una volta tradotta nel sistema di riferimento globale, occuperà una precisa posizione all’interno della matrice della struttura assemblata.

ASSEMBLAGGIO DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA:

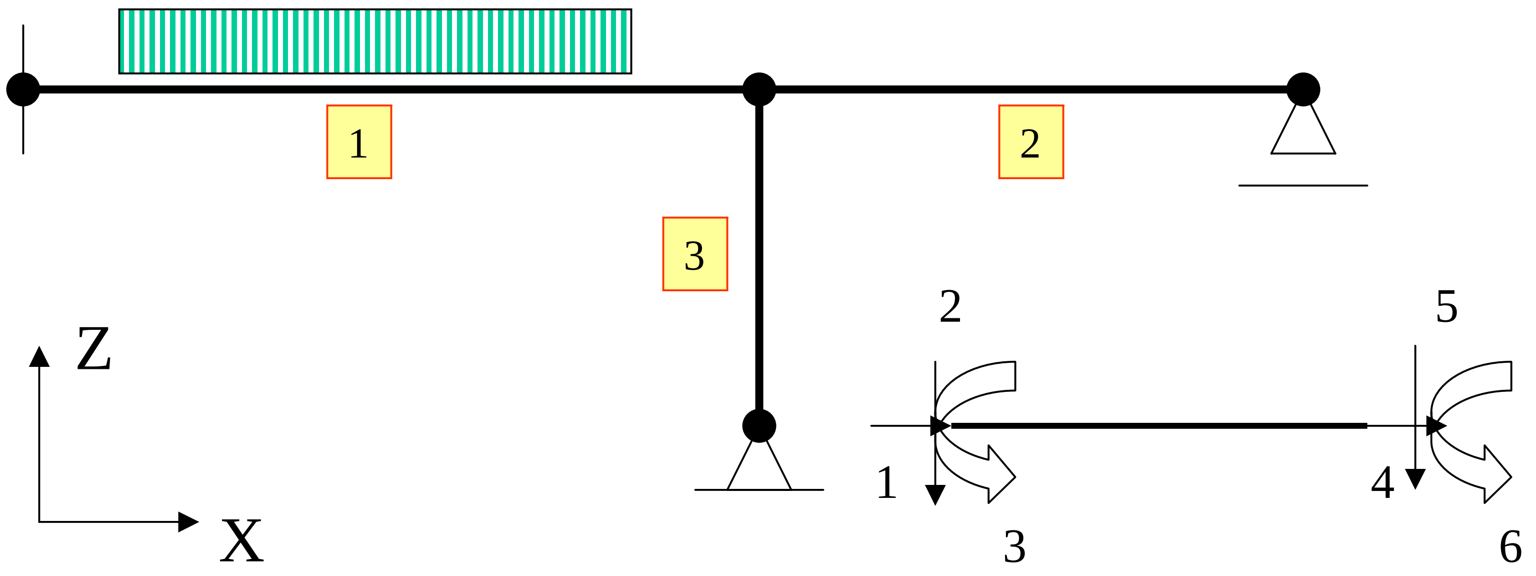
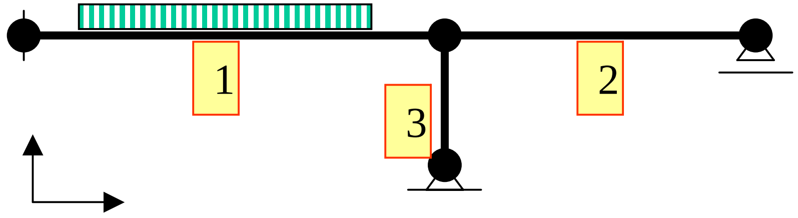


Tabella delle incidenze:

Vi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ELEMENTO 1	1	2	3	4	5	6						
ELEMENTO 2				1	2	3	4	5	6			
ELEMENTO 3				1	2	3				4	5	6

Matrice elemento 1: scritta nel sistema di rif. globale

	1	2	3	4	5	6
1	#	0	0	#	0	0
2	0	#	#	0	#	#
3	0	#	#	0	#	#
4	#	0	0	#	0	0
5	0	#	#	0	#	#
6	0	#	#	0	#	#



Assemblaggio Matrice di Rigidezza

passo 1

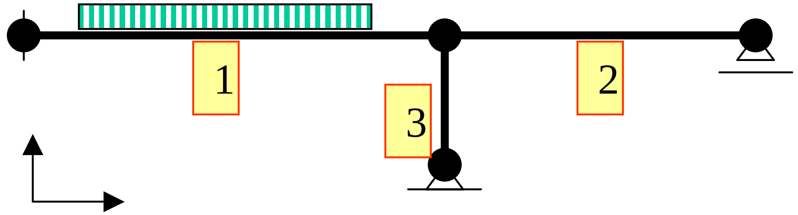
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												

Le matrici locali vengono “tradotte” nel sistema di riferimento globale, mediante rotazione.

$$K = a_g^T \cdot k_g \cdot a_g$$

Matrice elemento 2: scritta nel sistema di rif. globale

	1	2	3	4	5	6
1	#	0	0	#	0	0
2	0	#	#	0	#	#
3	0	#	#	0	#	#
4	#	0	0	#	0	0
5	0	#	#	0	#	#
6	0	#	#	0	#	#



Assemblaggio Matrice di Rigidezza

passo 2

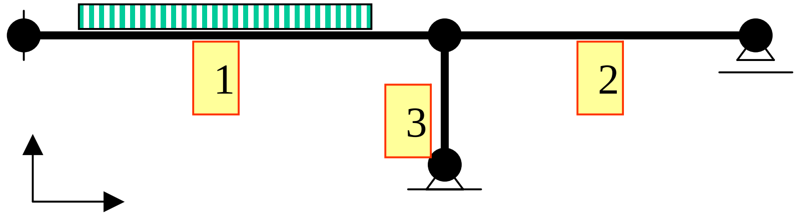
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												

Le matrici locali vengono “tradotte” nel sistema di riferimento globale, mediante rotazione.

$$K = a_g^T \cdot k_g \cdot a_g$$

Matrice elemento 3: scritta nel sistema di rif. globale

	1	2	3	4	5	6
1	#	0	0	#	0	0
2	0	#	#	0	#	#
3	0	#	#	0	#	#
4	#	0	0	#	0	0
5	0	#	#	0	#	#
6	0	#	#	0	#	#



Assemblaggio Matrice di Rigidezza

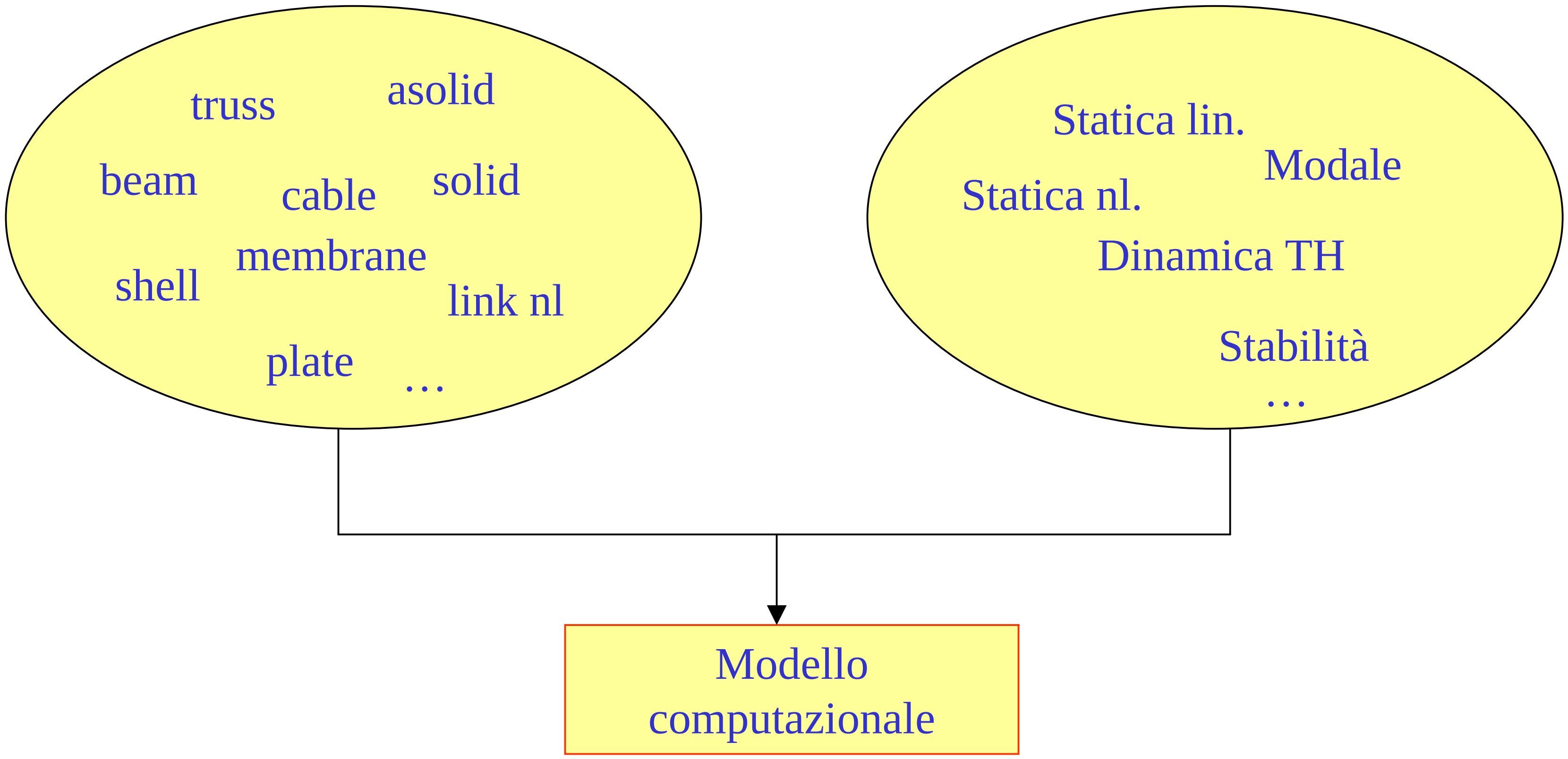
Le matrici locali vengono “tradotte” nel sistema di riferimento globale, mediante rotazione.

$$K = a_g^T \cdot k_g \cdot a_g$$

passo 3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												

LIBRERIA DI ELEMENTI FINITI ED IMPIEGHI ANALITICI



PROGRAMMI CLASSICI FEM

BERKELEY	SAP TABS
MIT	STRUDL FEABL
BOCHUM	FEMAS
HOUSTON	ANSYS

Università degli Studi di Firenze

Facoltà di Ingegneria - Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Elementi di progettazione strutturale

Prof.ssa Ing. Gloria Terenzi

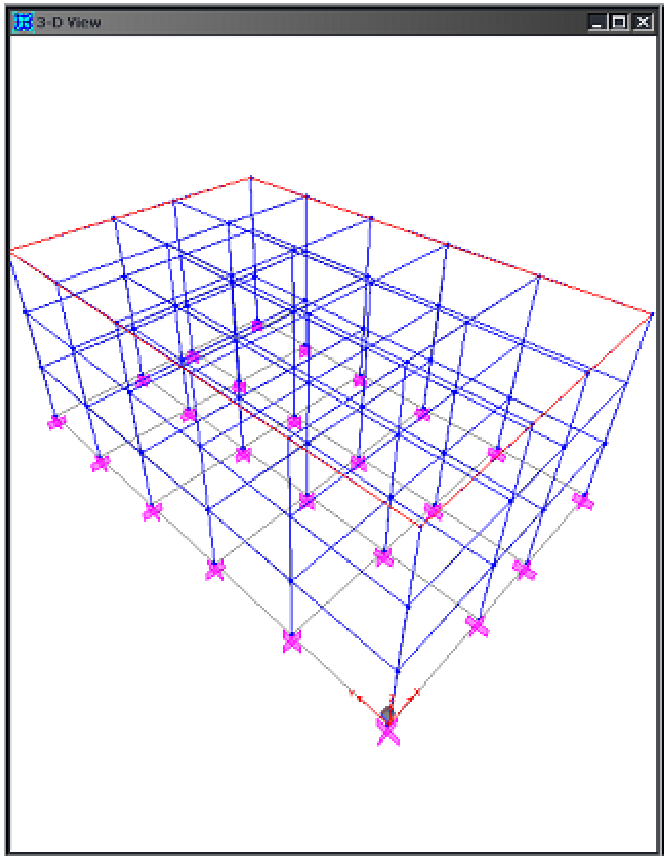
30/05/2005

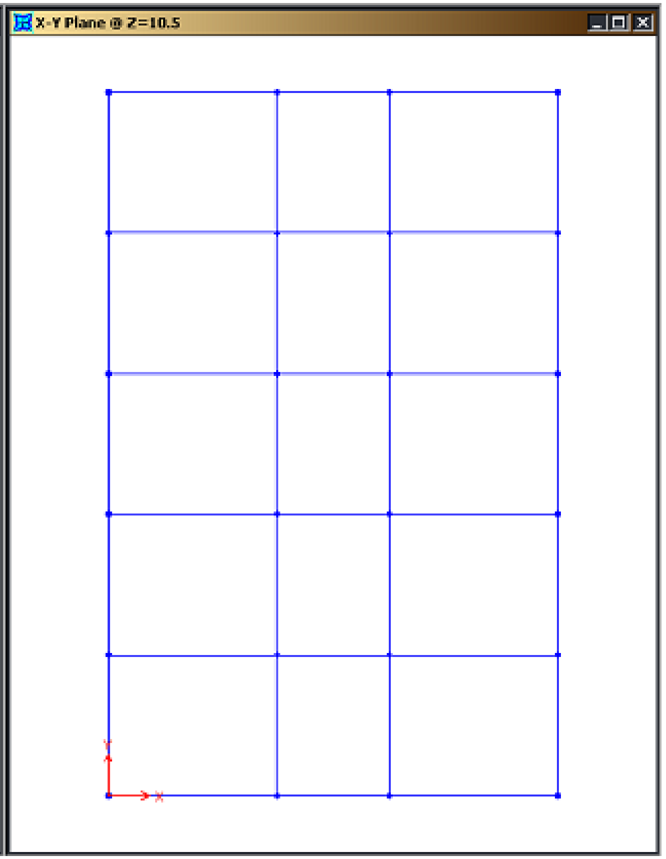
CODICE DI CALCOLO SAP2000:
-STATICA (SLU, SLE)
-SISMICA (STATICA LIN.)

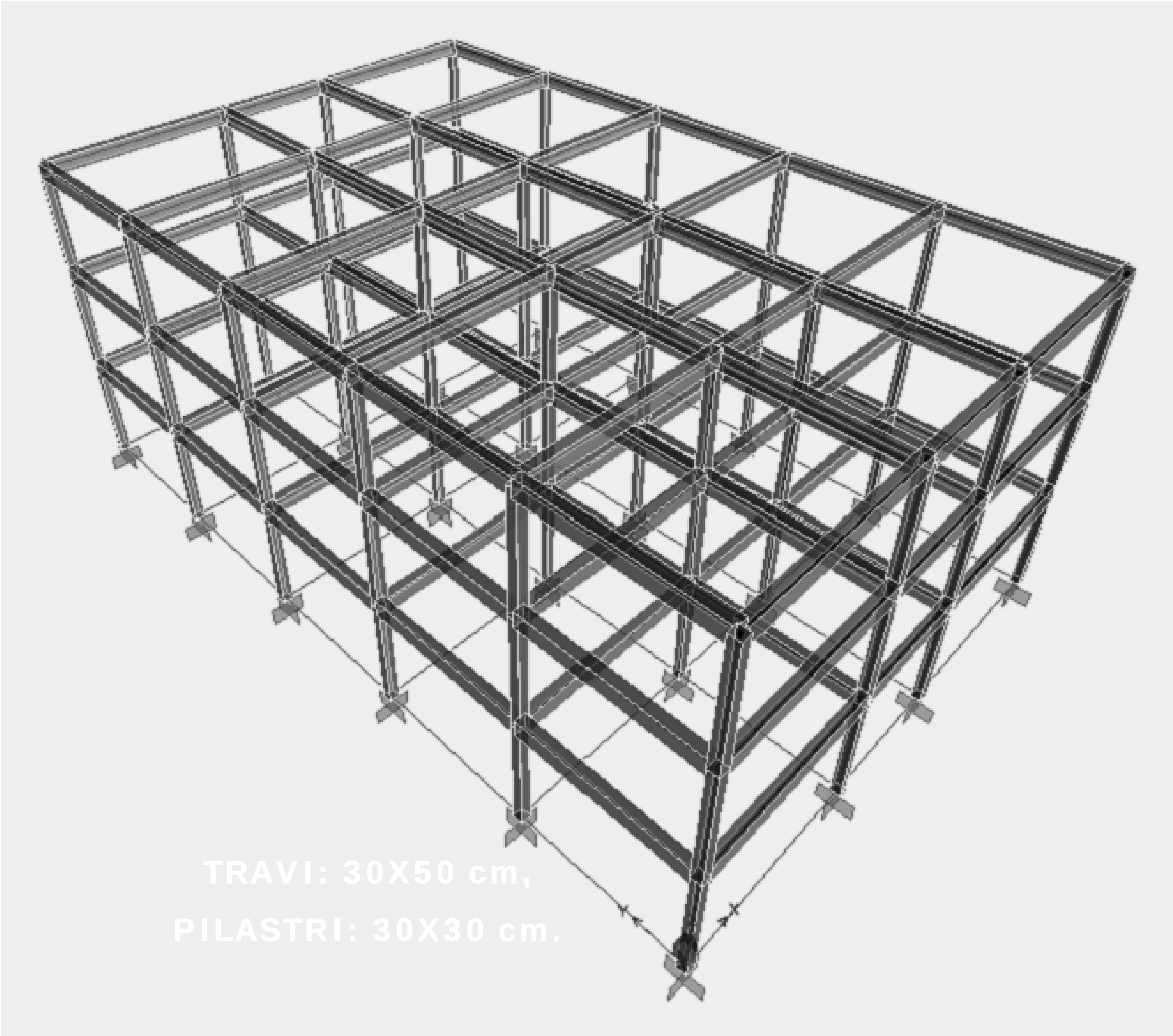
Ing. Leonardo Bandini

ESEMPIO 1:

-edificio per uffici da realizzarsi nel territorio di Napoli
-4 telai identici disposti lungo la direzione y
-6 telai identici disposti lungo la direzione x
-solai orditi secondo la direzione y
-3 livelli disposti a quota: 3.5 m, 7.0 m e 10.5 m

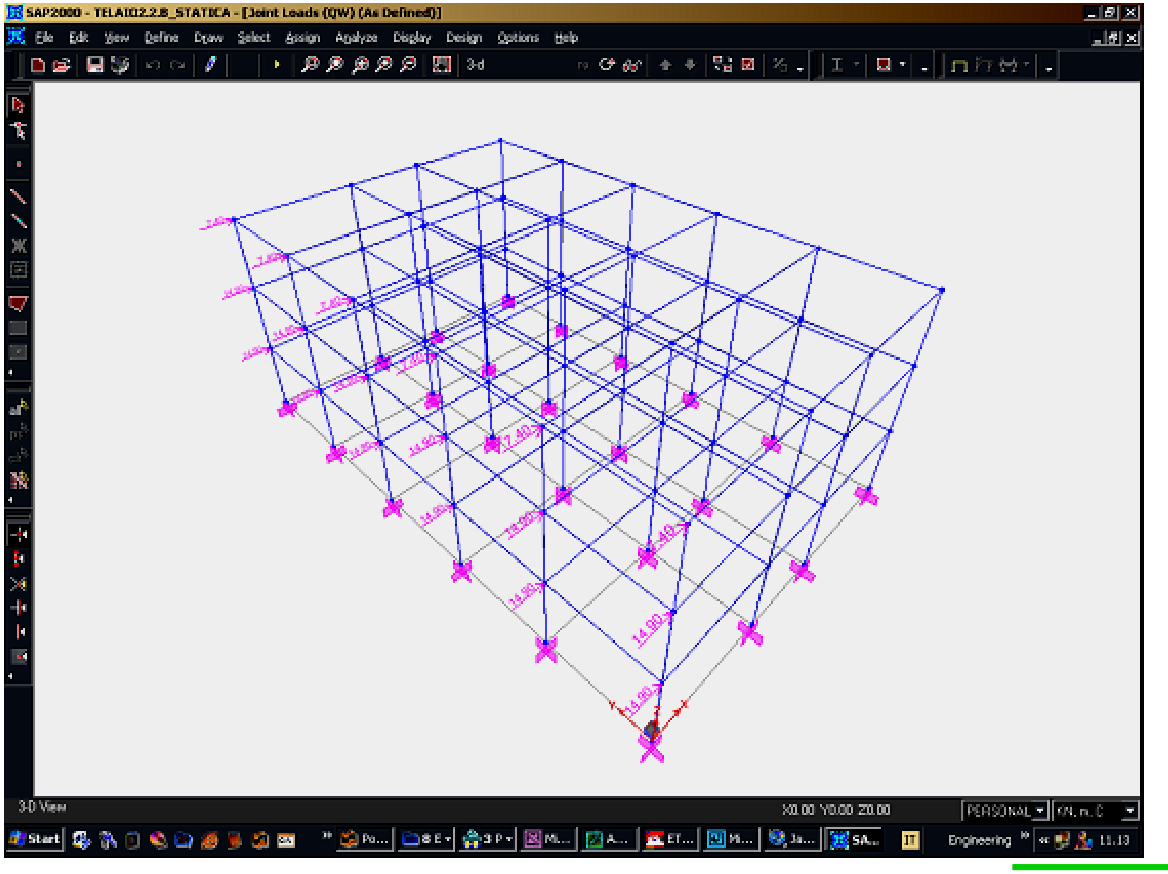





TRAVI: 30X50 cm,
PILASTRI: 30X30 cm.

NOMENCLATURA CARICHI:

-PP: Peso proprio strutturale [automatico]
-QP1: carico permanente prima permutazione [26.5 kN/m]
-QP2: carico permanente seconda permutazione [26.5 kN/m]
-QA1: carico accidentale prima permutazione [10.0 kN/m]
-QA2: carico accidentale seconda permutazione [10.0 kN/m]
-Qneve: carico neve [3 kN/m]
-QW: carico vento [14.9 kN, 7,4 kN]



D.M. 16.01.1996 - «Norme tecniche per il calcolo, l’esecuzione ed il collaudo delle strutture in cemento armato, normale e precompresso e per le strutture metalliche».

STATI LIMITE:

SLU $$F_d = \gamma_g \cdot G_k + \gamma_p \cdot P_k + \gamma_q \cdot Q_k + \gamma_q \cdot \left[\sum_{i=2} \Psi_{0i} \cdot Q_{ki} \right]$$

SLE $$F_d = G_k + P_k + Q_k + \left[\sum_{i=2} \Psi_{0i} \cdot Q_{ki} \right]$$ ***Comb. Rare [0.995]***

SLE $$F_d = G_k + P_k + \Psi_{11} Q_k + \left[\sum_{i=2} \Psi_{2i} \cdot Q_{ki} \right]$$ ***Comb. freq. [0.95]***

SLE $$F_d = G_k + P_k + Q_k + \left[\sum_{i=2} \Psi_{2i} \cdot Q_{ki} \right]$$ ***Comb. quasi perm. [0.5]***

- Valore caratteristico Q_k
- Valore di combinazione rara $\Psi_0 \cdot Q_k$
- Valore di combinazione frequente $\Psi_1 \cdot Q_k$
- Valore di combinazione quasi permanente $\Psi_2 \cdot Q_k$

D.M. 16.01.1996 - «Norme tecniche per il calcolo, l’esecuzione ed il collaudo delle strutture in cemento armato, normale e precompresso e per le strutture metalliche».

γ_g = 1,4 (oppure 1,0 se il suo contributo aumenta la sicurezza);
γ_p = 1,2 (oppure 0,9 se il suo contributo aumenta la sicurezza);
γ_q = 1,5 (oppure 0,0 se il suo contributo aumenta la sicurezza);
ψ_{0i} = coefficienti di combinazione allo stato limite ultimo, da assumere pari a 0,7 per i carichi variabili di esercizio nei fabbricati per abitazione e uffici e per le azioni da neve, pari a 0 per le azioni da vento.

Destinazione d'uso	Ψoi	Ψ2i
Abitazioni, uffici	0.70	0.30
Uffici aperti al pubblico, scuole, negozi, autorimesse	0.70	0.60
Tetti e coperture con neve	0.70	0.20
Magazzini, archivi	1.00	0.80
Vento	0.00	0.00

D.M. 16.01.1996 - «Norme tecniche per il calcolo, l’esecuzione ed il collaudo delle strutture in cemento armato, normale e precompresso e per le strutture metalliche».

$$S_d \leq R_d$$

SLU:

•CALCOLARE LE S_d [AZIONI INTERNE: N,T,M] AGENTI NELLE SEZIONI PIU’ SOLLECITATE IN CORRISPONDENZA DELLE COMBINAZIONI DI CARICO PIU’ GRAVOSE.

•CALCOLARE LE RESISTENZE DI PROGETTO R_d INTESE COME LE RESISTENZE DELLE SEZIONI SIGNIFICATIVE.

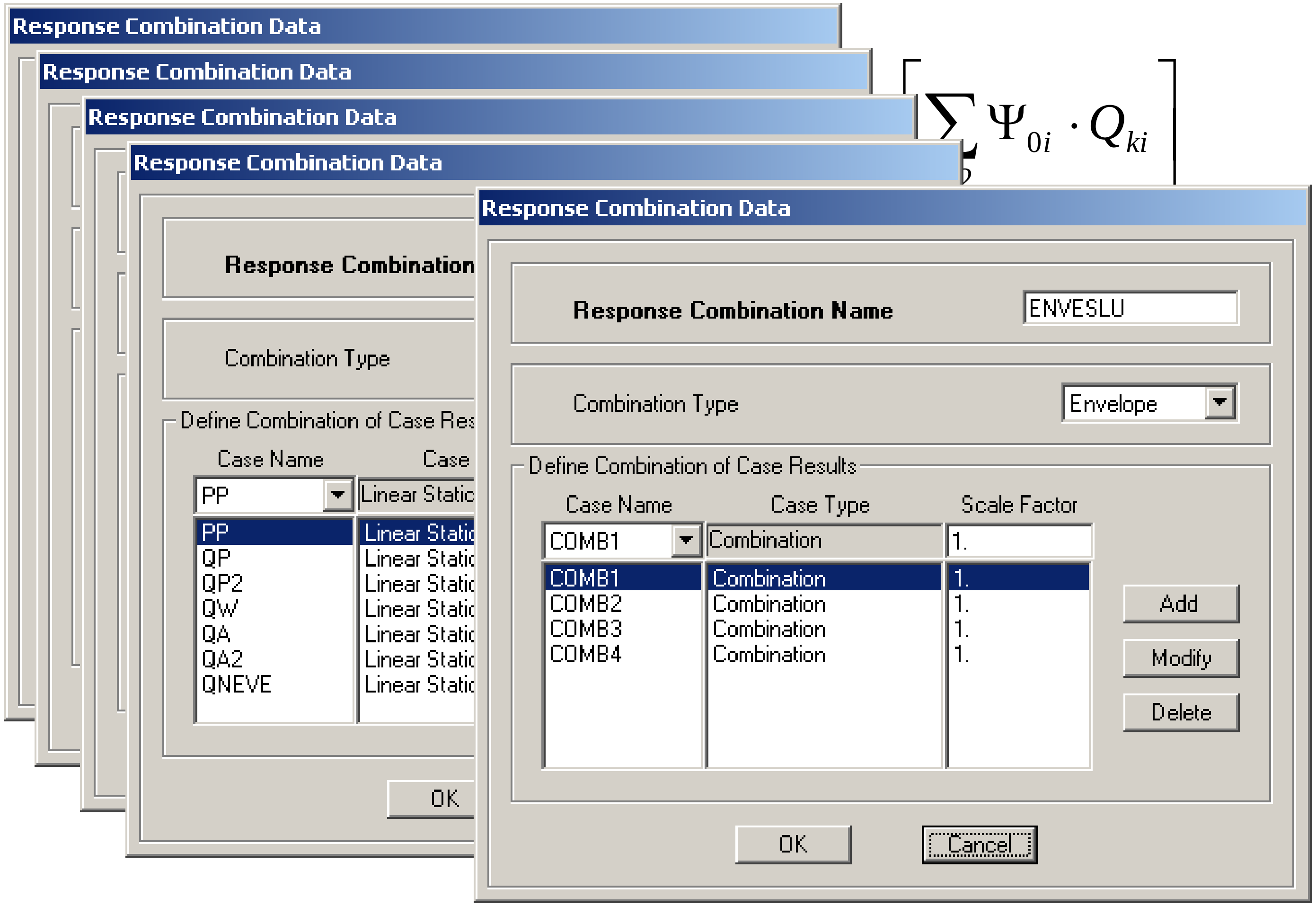
SLE:

•CALCOLARE LE S_d [DEFORMAZIONI, SPOSTAMENTI, DIMENSIONI DI FESSURE, ECC.] PRODOTTE DALLE COMBINAZIONI DI CARICO PIU’ GRAVOSE TENENDO CONTO DI EFFETTI DI LUNGA DURATA.

•CALCOLARE LE RESISTENZE DI PROGETTO R_d CHE SONO VALORI NOMINALI RITENUTI ACCETTABILI.

COMBINAZIONE DEI CARICHI:

-COMBO1: Fd = 1.4x(PP+QP1+QP2)+1.5x(QA1+QA2)+1.05x(QNEVE+QW);
-COMBO2: Fd = 1.4x(PP+QP1)+1x(QP2)+1.5x(QA1)+1.05x(QNEVE+QW);
-COMBO3: Fd = 1.4x(PP+QP2)+1x(QP1)+1.5x(QA2)+1.05x(QNEVE+QW);
-COMBO4: Fd = 1.4x(PP+QP1+QP2)+1.05x(QA1+QA2+ QNEVE)+1.5x(QW);

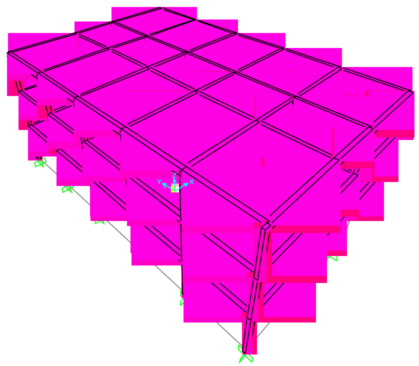


METODO DI ANALISI STATICA LINEARE – modello spaziale

Calcolo del taglio alla base:

$$G_k + \left[\sum_{i=1}^{n} \Psi_{Ei} \cdot Q_{ki} \right]$$

“PESO SISMICO”



PIANO 3: P3=G3+0.3xQ3+0.2xQN=323.74 t

PIANO 2: P2=G2+0.3x0.5xQ2 = 315.88 t

PIANO 1: P1=G1+0.3x0.5xQ1 = 315.88 t

Ptot= 955.5 t

$$S_{Adx}(T_{1x}) = a_g \cdot S \cdot \frac{2.5}{q} \cdot \left(\frac{Tc}{T_{1x}} \right) = 0.25x1.25x\frac{2.5}{5.85}x\left(\frac{0.5}{0.83} \right) = 0.0805g$$

$$S_{Ady}(T_{1y}) = a_g \cdot S \cdot \frac{2.5}{q} \cdot \left(\frac{Tc}{T_{1y}} \right) = 0.25x1.25x\frac{2.5}{5.85}x\left(\frac{0.5}{0.78} \right) = 0.0856g$$

$$V_{bx}^{MAX} = 0.0805x955.5 = 76.9t$$

$$V_{by}^{MAX} = 0.0856x955.5 = 81.8t$$

$$\longrightarrow F_{si} = V_b \cdot \frac{W_i \cdot z_i}{\sum W_j \cdot z_j} \rightarrow F_{si,1},\ F_{si,2},\ F_{si,3}$$

Tabella 3.4 - Coefficienti ψ_{2i} per varie destinazioni d'uso

Destinazione d'uso	ψ_{2i}
Abitazioni, Uffici	0,30
Uffici aperti al pubblico, Scuole, Negozi, Autorimesse	0,60
Tetti e coperture con neve	0,20
Magazzini, Archivi, Scale	0,80
Vento, variazione termica	0,00

Tabella 3.5 - Coefficienti φ per edifici

Carichi ai piani	φ
Copertura	1,0
Archivi	1,0
Carichi correlati	0,8
Carichi indipendenti	0,5