

Metodi numerici nell'ingegneria sismica

SAP2000, PERFORM3D, VIS

Udine 26 Febbraio 2009

Ing. Massimo Brunetta - Ing. Leonardo Bandini

www.csiitaliasrl.it - leonardo@csiitaliasrl.it

Argomenti

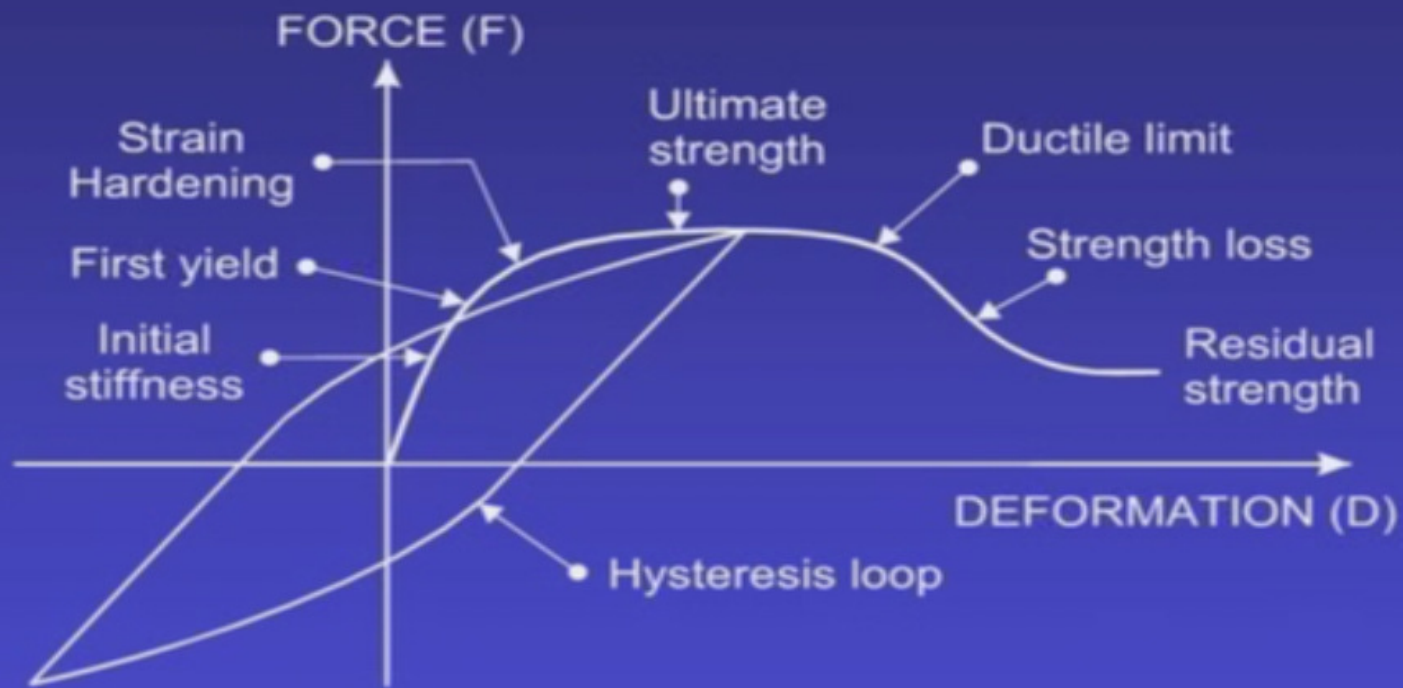
- ASPETTI IMPORTANTI SUL COMPORTAMENTO NON LINEARE
- PROGETTAZIONE SECONDO RESISTENZA *vs* PROGETTAZIONE SECONDO DEFORMAZIONE
(*stength-based vs deformation-based design*)
- PROGETTAZIONE SECONDO PRESTAZIONE
(*performance based design*)
- GERARCHIA DELLA RESISTENZE
(*capacity design*)
- TECNICHE DI MODELLAZIONE NON LINEARE
- STATI LIMITE E RAPPORTO DOMANDA/CAPACITA'
- ANALISI DINAMICA NONLINEARE *vs* ANALISI PUSHOVER

Aspetti importanti sul comportamento non lineare

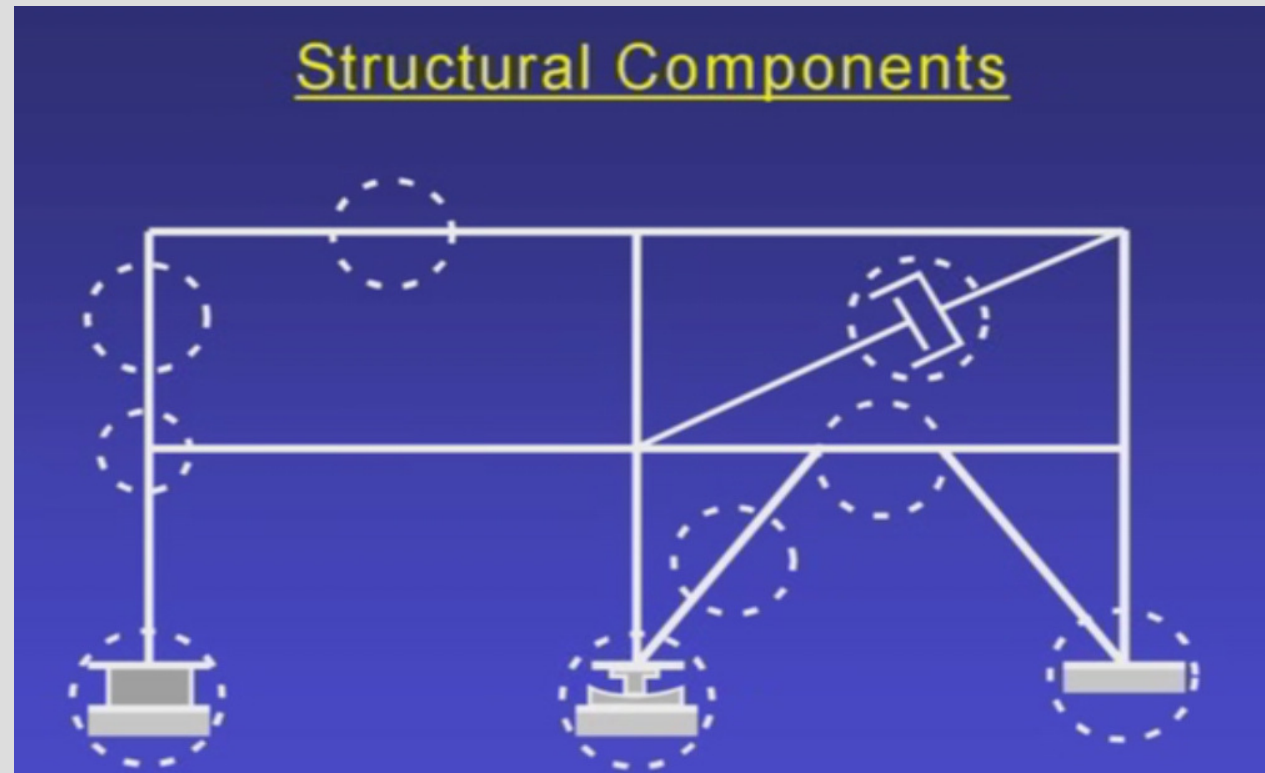
- L'analisi non lineare rappresenta uno strumento di progettazione:
 - non deve essere pensato per ottenere il comportamento “esatto” della struttura;
 - deve rappresentare un utile strumento di progettazione;
- Ci sono due tipi di non linearità:
 - non linearità geometrica: effetti causati dal cambiamento della forma della struttura per effetto deformativo, effetti P- Δ ed effetti di grandi spostamenti.
 - non linearità del materiale: snervamento, fessurazione, scorrimento, frattura. Di norma causati da un comportamento inelastico.
La non linearità del materiale è di norma più complicata da studiare e verrà di seguito approfondita.

Aspetti importanti sul comportamento non lineare

Main Aspects of F-D Relationship



Aspetti importanti sul comportamento non lineare



- La relazione tra forza e spostamento (F-D) deve essere nota per le membrature della struttura sia quelle con comportamento lineare che quelle a comportamento non lineare.
- La relazione tra forza e spostamento (F-D) della struttura è ottenuta dall'analisi.

Aspetti importanti sul comportamento non lineare

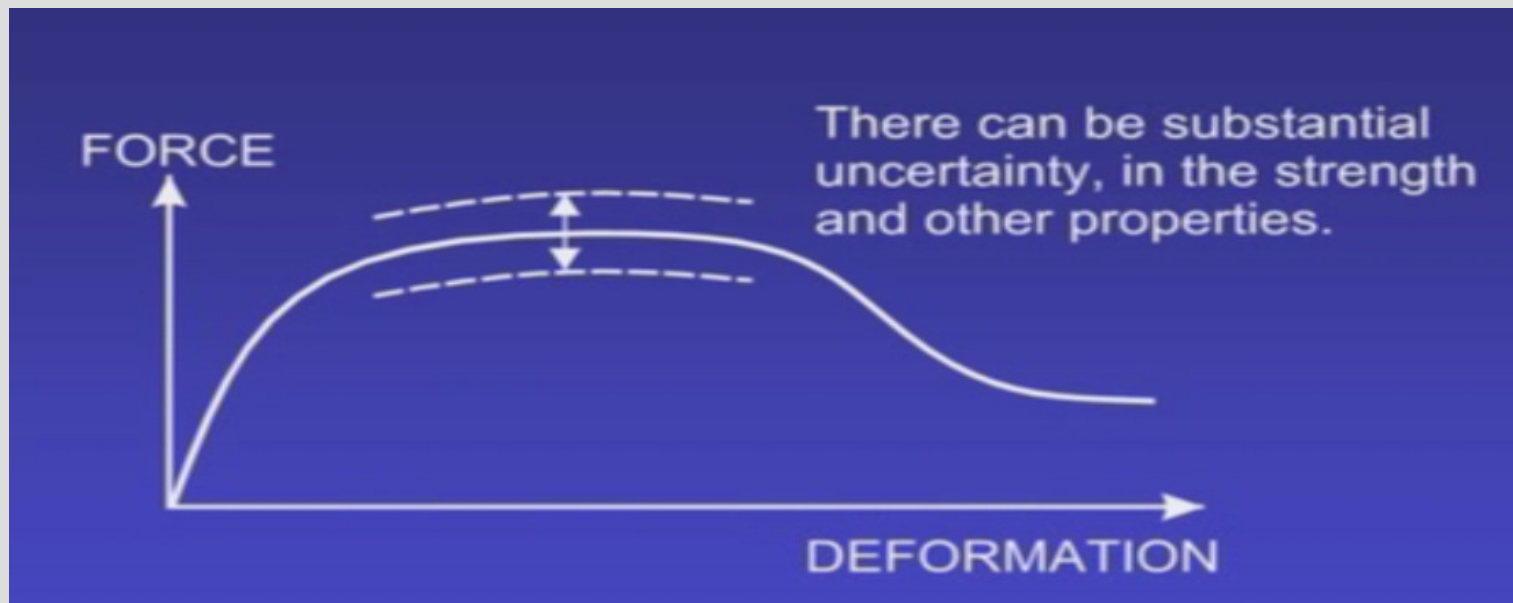
ALCUNE COMPLICAZIONI: COMPORTAMENTO F-D



- Alcuni elementi strutturali hanno un comportamento difficilmente prevedibile che complica la determinazione della legge F-D.

Aspetti importanti sul comportamento non lineare

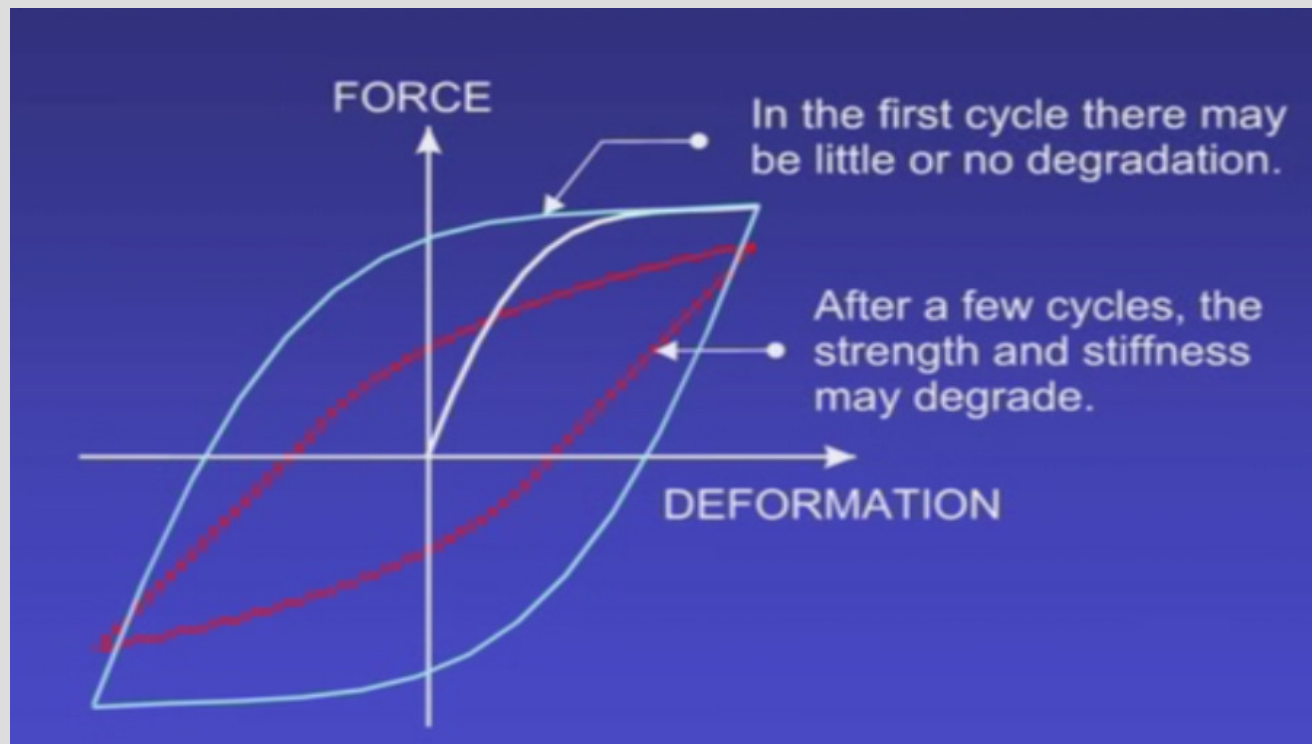
ALCUNE COMPLICAZIONI: RESISTENZA INCERTA



- La resistenza, ma anche altri fattori come la rigidezza e la duttilità, non sono “esattamente” note: altrimenti perché avremmo la necessità di adottare dei fattori di sicurezza?

Aspetti importanti sul comportamento non lineare

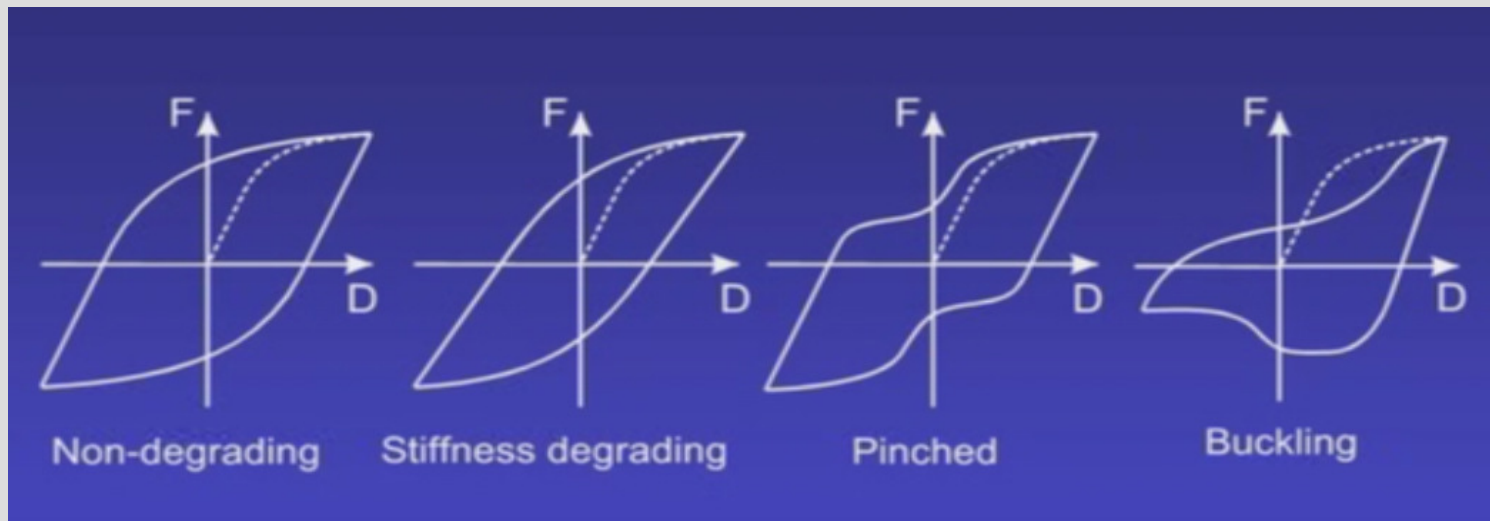
ALCUNE COMPLICAZIONI: INCERTEZZA SUL DEGRADO CICLICO



- L'alternanza dei cicli di carico e scarico può produrre un degrado ciclico con conseguente diminuzione di rigidezza e di resistenza della sezione.

Aspetti importanti sul comportamento non lineare

ESISTENZA DI DIVERSI CICLI ISTERETICI



- Cicli non degradanti (per esempio quelli di molti dispositivi di protezione sismica), cicli con forte degrado, effetto di pinching (per esempio una nodo di una struttura in c.a. che soggetto a carico e scarico oltre un certo limite, produce l'espulsione di materiale dal nodo o dalla "cerniera"), cicli di elementi soggetti ad instabilità (per esempio aste di un controvento metallico).

Aspetti importanti sul comportamento non lineare

MOLTE COMPLICAZIONI... MA NON DISPERIAMO!

- **NON DISPERIAMO!** perché l'obiettivo non è l'esatta predizione del comportamento della struttura.
- **NON DISPERIAMO!** perché l'obiettivo è ottenere delle informazioni aggiuntive che ci consentano di migliorare la progettazione o studiare sistemi per migliorare il comportamento della struttura.
- **L'ANALISI LINEARE** è lontana da poter essere definita accurata, eppure nessuno di noi direbbe che non ci fornisce delle informazioni utili per la progettazione, quindi perché non applicare lo stesso concetto a l'analisi non lineare?
- L'analisi non lineare è più difficile, ma è anche più razionale!
- L'analisi non lineare è più difficile, ma può darci maggiori e migliori informazioni di una analisi lineare.

Argomenti

- ASPETTI IMPORTANTI SUL COMPORTAMENTO NON LINEARE
- PROGETTAZIONE SECONDO RESISTENZA *vs* PROGETTAZIONE SECONDO DEFORMAZIONE
(*strength-based vs deformation-based design*)
- PROGETTAZIONE SECONDO PRESTAZIONE
(*performance based design*)
- GERARCHIA DELLA RESISTENZE
(*capacity design*)
- TECNICHE DI MODELLAZIONE NON LINEARE
- STATI LIMITE E RAPPORTO DOMANDA/CAPACITA'
- ANALISI DINAMICA NONLINEARE *vs* ANALISI PUSHOVER

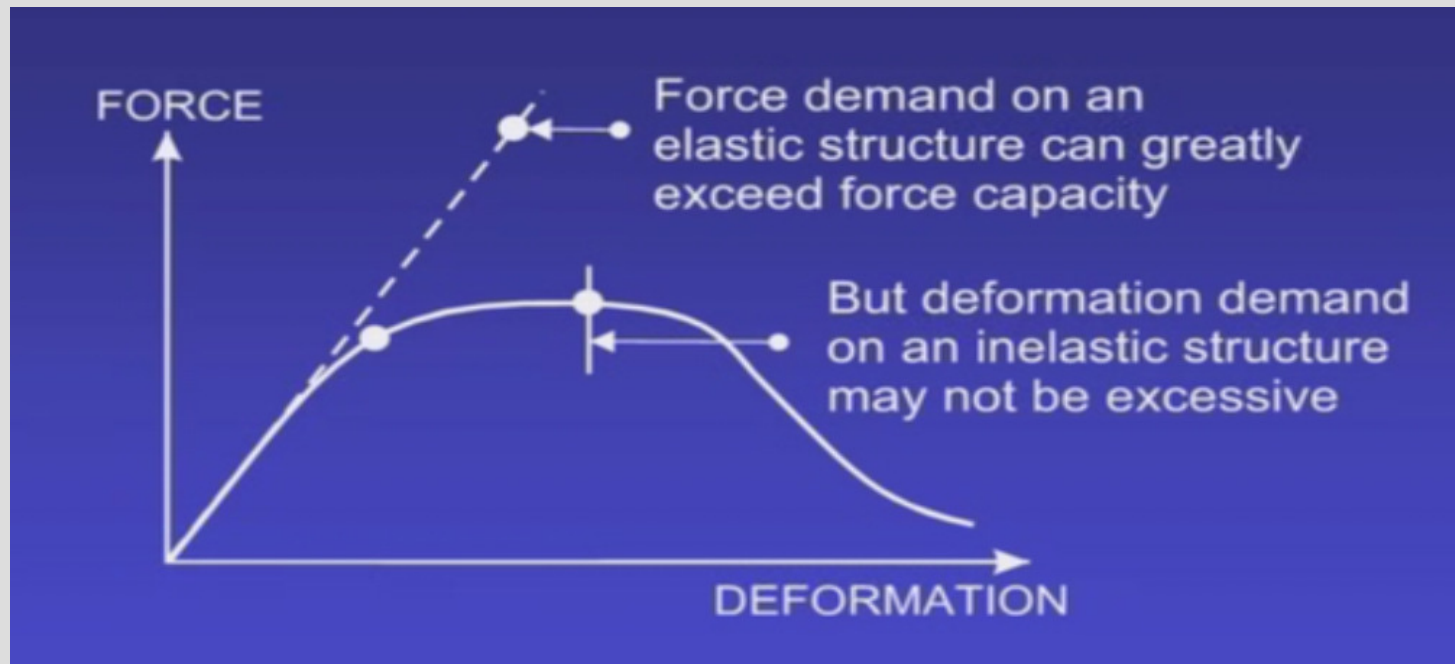
PROGETTAZIONE SECONDO RESISTENZA VS PROGETTAZIONE SECONDO DEFORMAZIONE

PROGETTAZIONE SECONDO RESISTENZA

- La verifica si basa sul rapporto capacità/domanda, ovvero resistenza/azione. Ovviamente la resistenza caratteristica viene abbattuta con fattori di sicurezza per tener in conto dell'incertezza sul materiale e le azioni vengono incrementate per tener in conto della incertezza sulla loro determinazione.
- Di norma la verifica viene fatta al livello locale di ogni singola membratura.
- L'analisi lineare viene utilizzata per calcolare la domanda. Questo è corretto perché la struttura rimane “spesso” in campo sostanzialmente elastico.

PROGETTAZIONE SECONDO RESISTENZA VS PROGETTAZIONE SECONDO DEFORMAZIONE

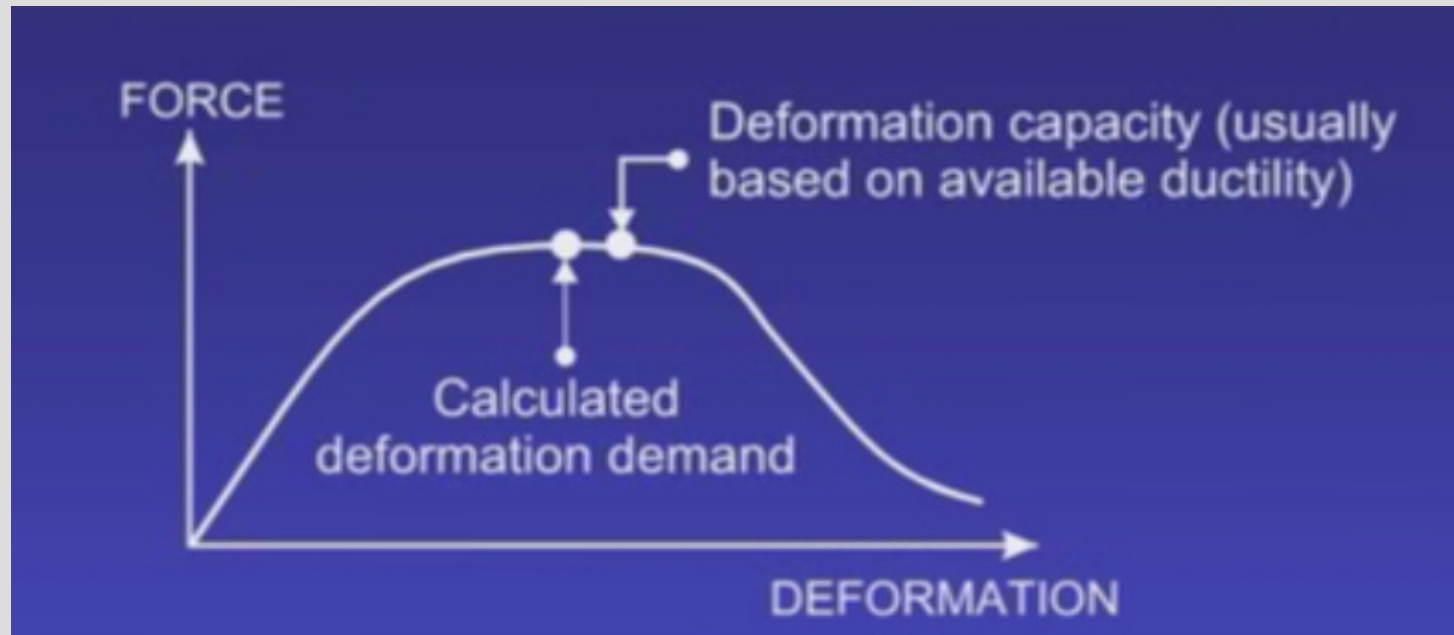
PROGETTAZIONE SECONDO RESISTENZA



- Per l'azione sismica è impensabile pensare di progettare pretendendo che la struttura nel suo insieme ed in ogni sua membratura rimanga in campo elastico. Da qui nascono i concetti come il fattore di struttura, alla base della determinazione dell'abbattimento della domanda sotto sisma.
- L'escursione in campo non lineare produce un abbattimento delle forze ma un aumento degli spostamenti.

PROGETTAZIONE SECONDO RESISTENZA VS PROGETTAZIONE SECONDO DEFORMAZIONE

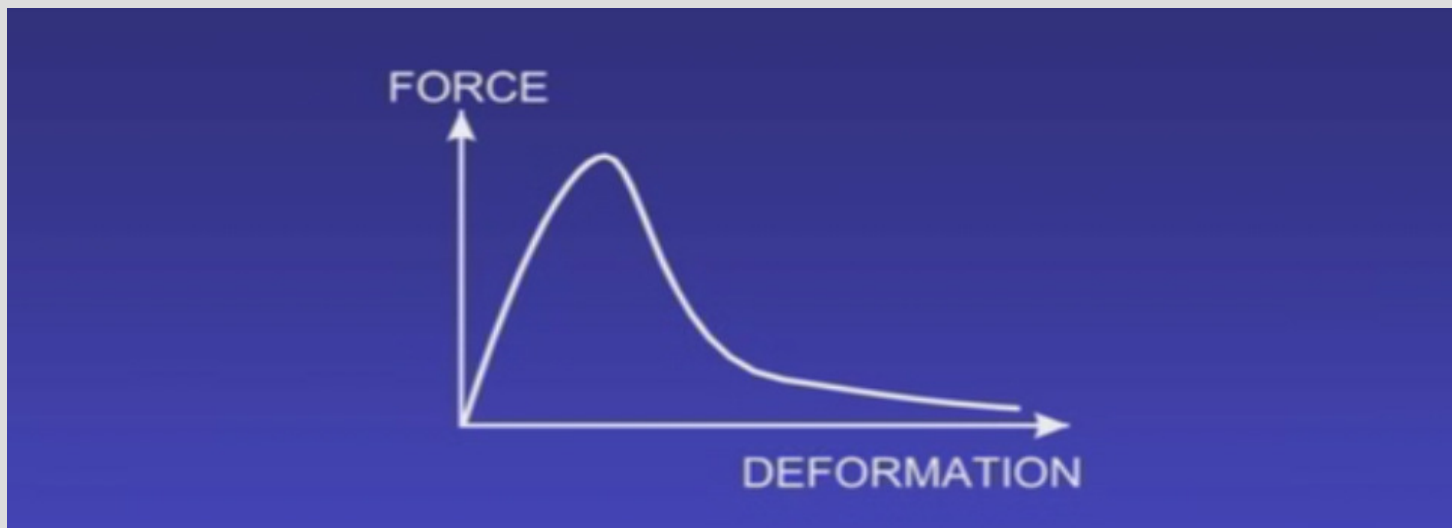
PROGETTAZIONE SECONDO DEFORMAZIONE



- La verifica viene fatta a livello di componente strutturale o struttura completa confrontando la domanda di deformazione che deve essere minore della capacità di deformazione.
- La domanda di deformazione deve essere calcolata con un'analisi non lineare perché la struttura ha un comportamento non lineare e le sue membrature possono raggiungere e superare lo snervamento.

PROGETTAZIONE SECONDO RESISTENZA VS PROGETTAZIONE SECONDO DEFORMAZIONE

COMPONENTI FRAGILI



- Questi elementi sono caratterizzati da una bassa duttilità e una volta raggiunta la loro massima resistenza se la domanda cresce arrivano a rottura.
- Questi elementi dovranno essere progettati confrontando capacità e domanda in termini di resistenza.

PROGETTAZIONE SECONDO RESISTENZA VS PROGETTAZIONE SECONDO DEFORMAZIONE

PROCEDURA DI PROGETTAZIONE SECONDO DEFORMAZIONE

- Definizione delle capacità deformative degli elementi duttili.
- Definizione della capacità di resistenza per gli elementi fragili (o di tutti gli elementi che “vogliamo” far rimanere in campo elastico).
- Si usa una analisi non lineare sulla struttura per calcolare la domanda di deformazione e di resistenza.
- Se $D/C \leq 1$ la verifica è soddisfatta.

ATTENZIONE: come per le verifiche a resistenza non si ha solo un parametro generale di domanda e uno di capacità, ma per ogni membratura o gruppi di esse si otterranno rapporti D/C .

Argomenti

- ASPETTI IMPORTANTI SUL COMPORTAMENTO NON LINEARE
- PROGETTAZIONE SECONDO RESISTENZA *vs* PROGETTAZIONE SECONDO DEFORMAZIONE
(*strength-based vs deformation-based design*)
- PROGETTAZIONE SECONDO PRESTAZIONE
(*performance based design*)
- GERARCHIA DELLA RESISTENZE
(*capacity design*)
- TECNICHE DI MODELLAZIONE NON LINEARE
- STATI LIMITE E RAPPORTO DOMANDA/CAPACITA'
- ANALISI DINAMICA NONLINEARE *vs* ANALISI PUSHOVER

PROGETTAZIONE SECONDO PRESTAZIONE

- Le normative “convenzionali” non stabiliscono esplicitamente i livelli prestazionali.
- L’approccio prestazionale vuole dare ragionevole sicurezza che un progetto soddisferà il raggiungimento di livelli prestazionali, ovvero, che la struttura non supererà, quando soggetta da una certa domanda, uno stato limite prestazionale.
- Comunemente si distingue tre livelli prestazionali:
 - IO - Occupazione immediata: limitato o assente stato di danno;
 - LS - Salvataggio delle vite: presenza di danno, anche severo;
 - CP - Prevenzione di Collasso: danno molto severo ma sicurezza ancora nei confronti del collasso, completo o parziale.



PROGETTAZIONE SECONDO PRESTAZIONE

PROGETTAZIONE SECONDO APPROCCIO PRESTAZIONALE

- Scelta del livello prestazionale e dei carichi di progetto.
- Scelta di parametri di controllo del rapporto D-C: spostamenti di interpiano, rotazioni delle cerniere plastiche, resistenza a taglio...
- Assunzione delle capacità deformative e di resistenza:
 - Deformative: FEMA 356, OPCM 3274...
 - Resistenza: DM96, EC2, OPCM3274, NTC2008...
- Calcolo della domanda di forza e deformazione usando un codice FEM.
- Se uno o più rapporti $D/C > 1$:
 - si modifica la struttura;
 - si fa “la punta alla matita” nella determinazione della Capacità
 - si fa “la punta alla matita” nella determinazione della Domanda

Argomenti

- ASPETTI IMPORTANTI SUL COMPORTAMENTO NON LINEARE
- PROGETTAZIONE SECONDO RESISTENZA *vs* PROGETTAZIONE SECONDO DEFORMAZIONE
(*strength-based vs deformation-based design*)
- PROGETTAZIONE SECONDO PRESTAZIONE
(*performance based design*)
- GERARCHIA DELLE RESISTENZE
(*capacity design*)
- TECNICHE DI MODELLAZIONE NON LINEARE
- STATI LIMITE E RAPPORTO DOMANDA/CAPACITA'
- ANALISI DINAMICA NONLINEARE *vs* ANALISI PUSHOVER

Gerarchia delle resistenze

CAPACITY DESIGN NOTO COME “GERARCHIA DELLE RESISTENZE”

- Alcuni elementi di una struttura possono entrare in campo plastico mantenendo una certa sicurezza, altri no e devono quindi essere dimensionati per rimanere in campo elastico.
- Si decide in anticipo quale elemento e in quale punto della struttura può plasticizzarsi.
- Noi possiamo dotare gli elementi che si possono snervare di sufficiente duttilità e gli elementi elastici di sufficiente resistenza.
- Sarebbe buona cosa creare più modelli non lineari o analizzare gli stessi con diverse distribuzioni di forza. Inoltre dobbiamo fissare più punti di controllo in cui verificare i rapporti D/C.

Gerarchia delle resistenze

STRUTTURE A TELAIO

- Si specificano le membrature che possono snervare, si verificano utilizzando fattori D/C di deformazione:
 - Travi in flessione
 - Colonne alla base e in copertura
- Le restanti membrature devono rimanere elastiche, si verificano utilizzando fattori D/C di resistenza:
 - Colonne eccetto alla base e in copertura
 - Connessioni
 - Travi e colonne a taglio
 - fondazioni

Gerarchia delle resistenze

STRUTTURE A PARETI ACCOPPIATE E NON

- Si specificano le membrature che possono snervare, si verificano utilizzando fattori D/C di deformazione:
 - Cerniere plastiche alla base dei setti
 - Taglio nelle travi di accoppiamento
- Le restanti membrature devono rimanere elastiche, si verificano utilizzando fattori D/C di resistenza:
 - Flessione in tutti gli altri livelli dei setti
 - Taglio sui setti
 - fondazioni

Gerarchia delle resistenze

ASPETTI IMPORTANTI

- Si devono stabilire formalmente quali rapporti D/C considerare e quali parametri alla base della determinazione della domanda assumere (forma spettrale, tempo di ritorno, stato limite, ecc) e basare le scelte di miglioramento prestazionale su questi rapporti.
- Tutti i risultati dell'analisi sono importanti, non si deve trascurare niente, questo è il concetto di “**consistenza dei risultati**”.
- Si possono fare degli aggiustamenti soggettivi sia alla domanda che alla capacità degli elementi. Il procedimento deve essere però oggettivo.
- Il procedimento non è perfetto (e allo stato attuale sembra impossibile che lo possa diventare).

Gerarchia delle resistenze

- ASPETTI IMPORTANTI SUL COMPORTAMENTO NON LINEARE
- PROGETTAZIONE SECONDO RESISTENZA *vs* PROGETTAZIONE SECONDO DEFORMAZIONE
(*strength-based vs deformation-based design*)
- PROGETTAZIONE SECONDO PRESTAZIONE
(*performance based design*)
- GERARCHIA DELLA RESISTENZE
(*capacity design*)
- **TECNICHE DI MODELLAZIONE NON LINEARE**
- STATI LIMITE E RAPPORTO DOMANDA/CAPACITA'
- ANALISI DINAMICA NONLINEARE *vs* ANALISI PUSHOVER

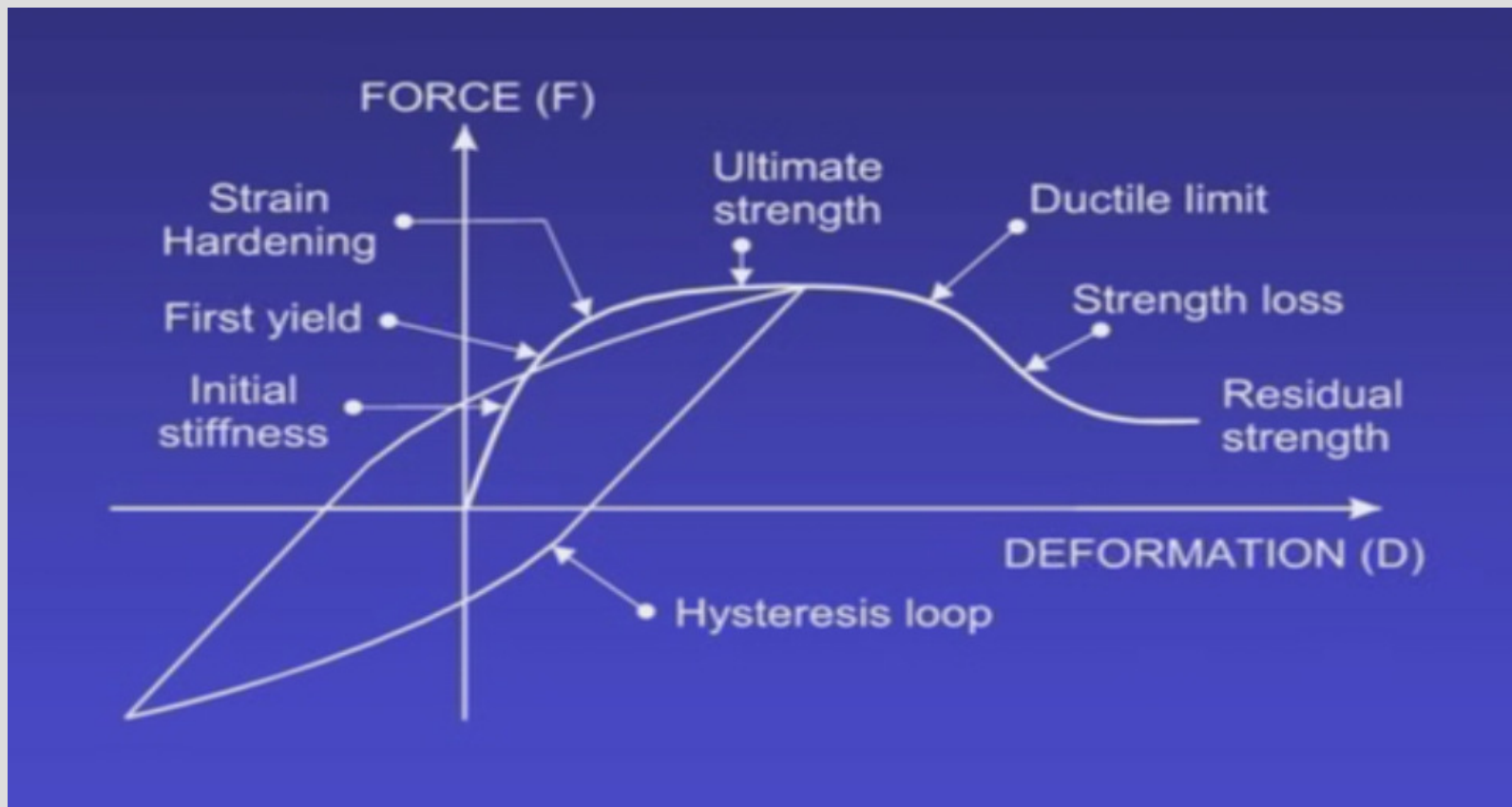
Tecniche di modellazione non lineare

RIEPILOGO

- L'analisi strutturale non è fine a se stessa, deve essere considerata uno strumento utile alla progettazione.
- L'obiettivo non è l'esatta simulazione del comportamento. Questo è impossibile per le strutture reali
- L'obiettivo è determinare dei rapporti D/C sufficientemente accurati per assumere delle decisioni importanti per la progettazione o per valutare una situazione in essere.

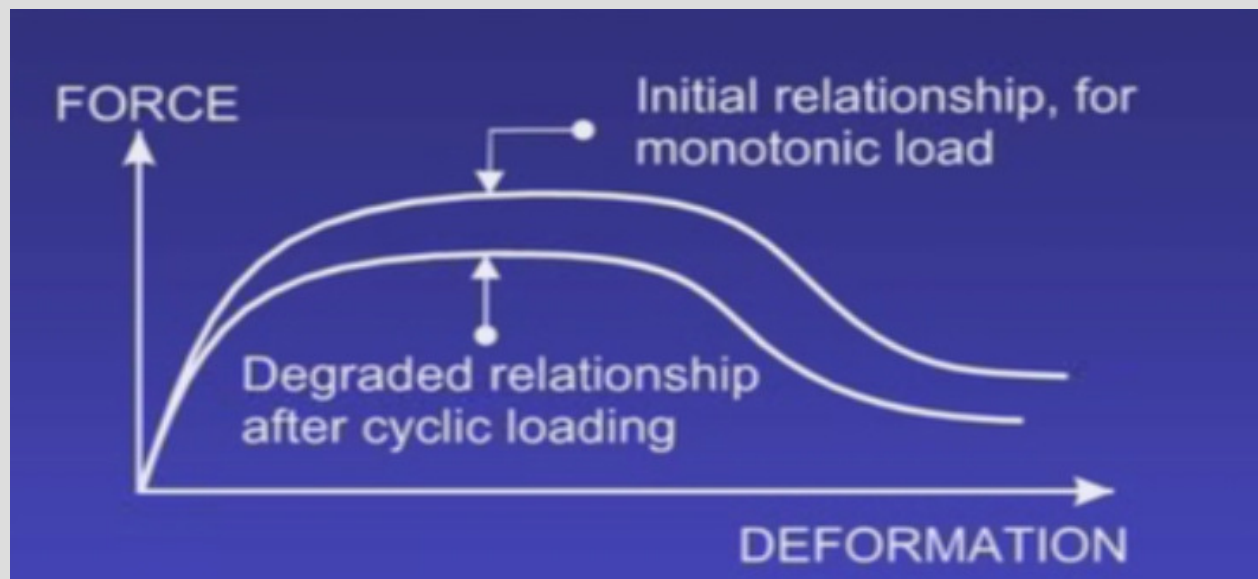
Tecniche di modellazione non lineare

RIEPILOGO



Tecniche di modellazione non lineare

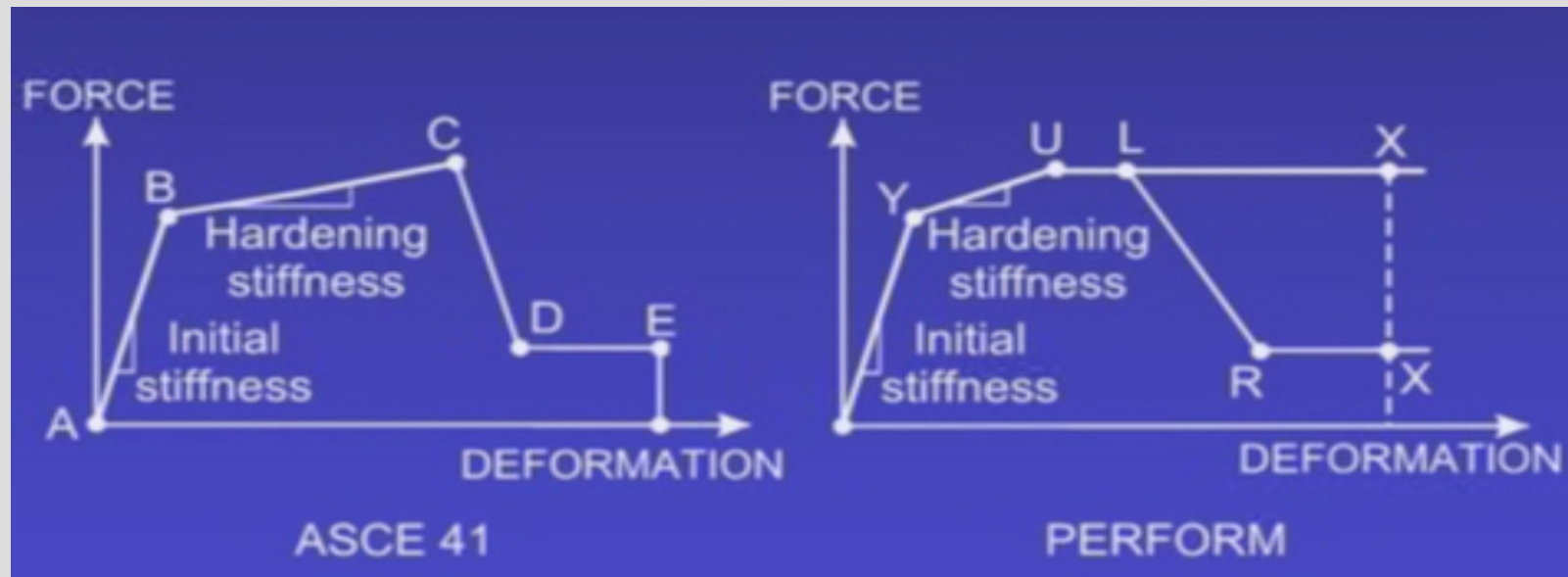
DEGRADO CICLICO



- La pratica comune è quella di assegnare una legge di degrado, una sorta di abbattimento energetico, dopo un ragionevole numero di cicli, della situazione iniziale.
- In futuro è possibile che si possa fornire un ciclo iniziale e uno completamente degradato, e poi assumere per gli stati intermedi una legge di variazione opportuna.

Tecniche di modellazione non lineare

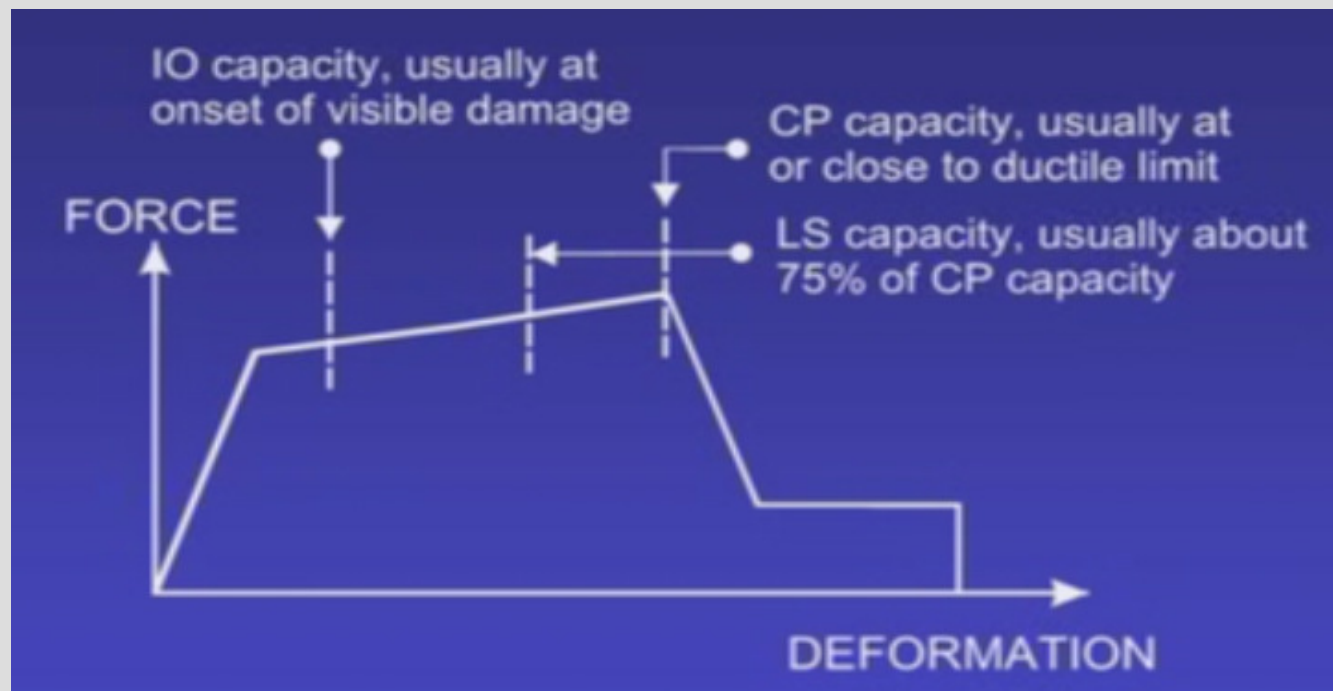
LEGGE FORZA SPOSTAMENTO



- Ci sono così tante incertezze sul comportamento “reale” non lineare di una sezione, così la cosa migliore che possiamo fare è catturare alcuni dei suoi aspetti più importanti.

Tecniche di modellazione non lineare

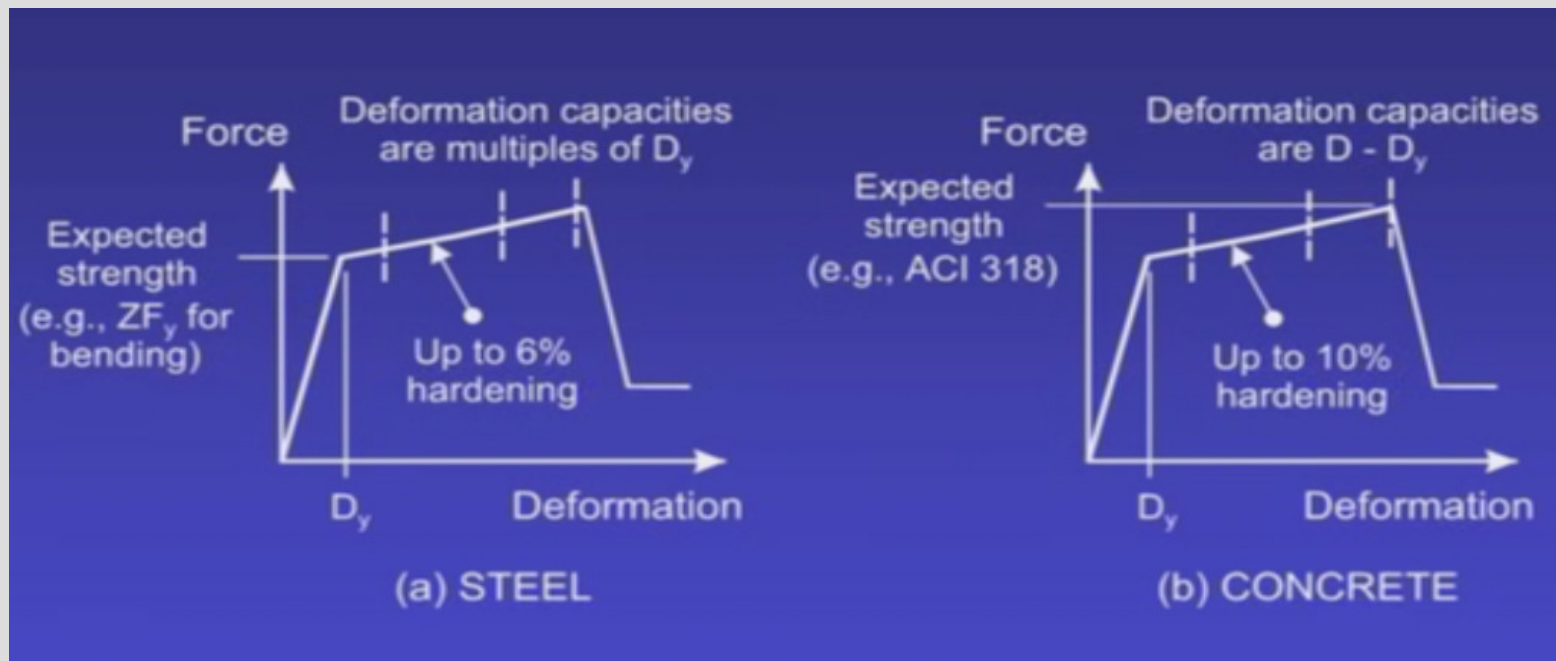
TIPICI CRITERI DI ACCETTAZIONE O TERMINI DI CAPACITA'



- I valori di capacità anche detti criteri di accettazione sono codificati in alcune “linee guida”, come per esempio la FEMA 356. Alcuni aspetti vengono affrontati anche nella nostra OPCM3274.

Tecniche di modellazione non lineare

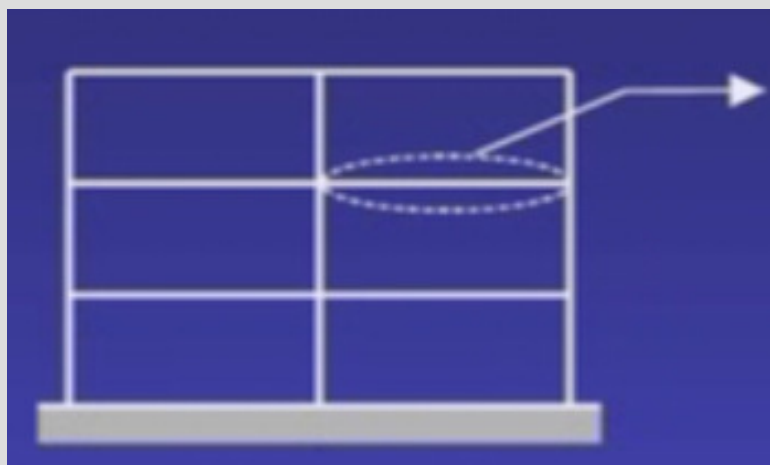
ACCIAIO vs CEMENTO ARMATO



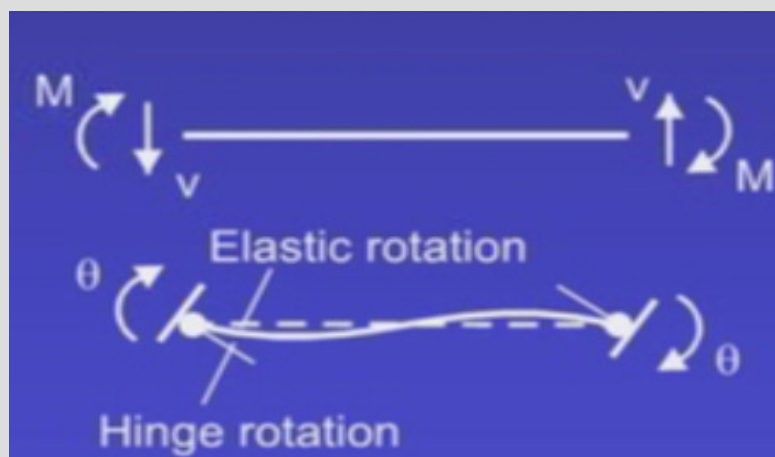
- Nelle sezioni in acciaio la parte plastica inizia dopo il raggiungimento, in termini di forza del comune valore di resistenza. Nelle sezioni in cemento armato, per arrivare ai valori di resistenza, noti come stati limite di rottura, si ha già l'interessamento del tratto a comportamento plastico.

Tecniche di modellazione non lineare

ESEMPIO: TRAVE IN C.A.



Nell'ottica della progettazione secondo la capacità per una trave a comportamento duttile verrà usato come fattore di controllo D/C la rotazione plastica



Argomenti

- ASPETTI IMPORTANTI SUL COMPORTAMENTO NON LINEARE
- PROGETTAZIONE SECONDO RESISTENZA *vs* PROGETTAZIONE SECONDO DEFORMAZIONE
(*stength-based vs deformation-based design*)
- PROGETTAZIONE SECONDO PRESTAZIONE
(*performance based design*)
- GERARCHIA DELLA RESISTENZE
(*capacity design*)
- TECNICHE DI MODELLAZIONE NON LINEARE
- **STATI LIMITE E RAPPORTO DOMANDA/CAPACITA'**
- ANALISI DINAMICA NONLINEARE *vs* ANALISI PUSHOVER

Stati limite e rapporto D/C

- Anche in una modesta struttura ci sono numerosi elementi, alcuni di essi saranno considerati duttili, altri fragili. In questo modo ci sono numerosi rapporti D/C da considerare e da tenere sotto controllo in una analisi non lineare. Di norma andrebbero controllati uno per uno.
- PERFORM organizza i rapporti D/C in “gruppi” di:
 - Elementi
 - Componenti
 - Livelli Prestazionali
- Per esempio questi potrebbero essere:
 - Travi di tutti i telai perimetrali
 - Ogni cerniera plastica di queste travi
 - Rotazioni di queste cerniere
 - Capacità di rotazione corrispondente ad uno stato limite

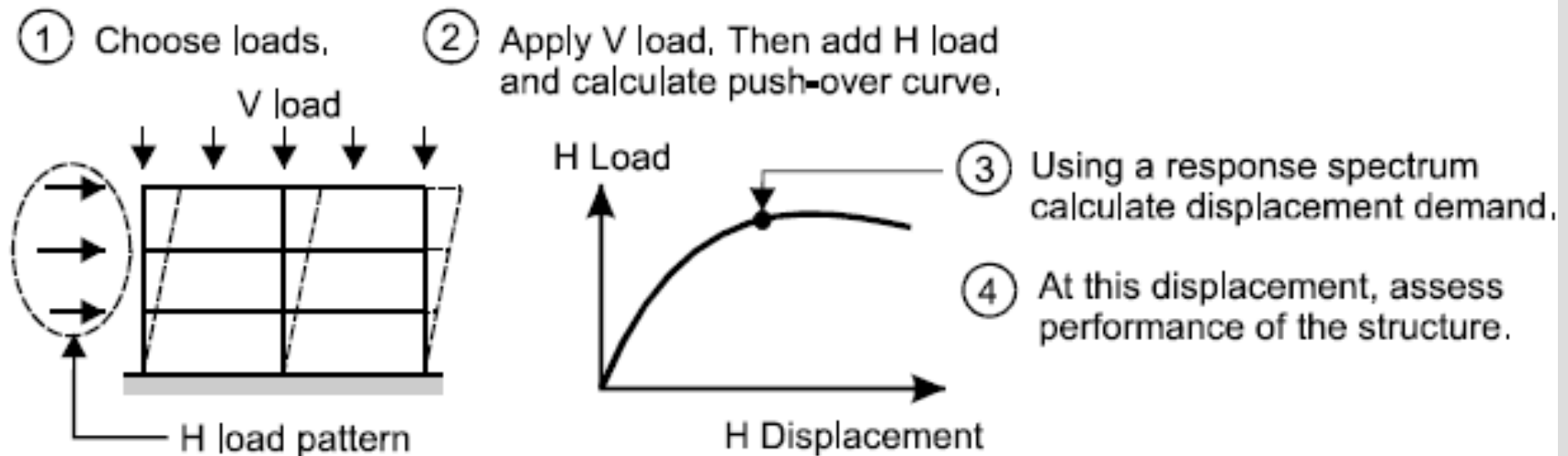
Argomenti

- ASPETTI IMPORTANTI SUL COMPORTAMENTO NON LINEARE
- PROGETTAZIONE SECONDO RESISTENZA *vs* PROGETTAZIONE SECONDO DEFORMAZIONE
(*stength-based vs deformation-based design*)
- PROGETTAZIONE SECONDO PRESTAZIONE
(*performance based design*)
- GERARCHIA DELLA RESISTENZE
(*capacity design*)
- TECNICHE DI MODELLAZIONE NON LINEARE
- STATI LIMITE E RAPPORTO DOMANDA/CAPACITA'
- ANALISI DINAMICA NONLINEARE *vs* ANALISI PUSHOVER

Dinamica non lineare

- Si applicano i carichi gravitativi. Questa parte di analisi può anche essere una analisi lineare.
- L'azione sismica è rappresentata da accelerogrammi che possono essere naturali (registrazioni di eventi passati) o artificiali (spettro-compatibili). Quelli naturali sono distribuiti nelle tre componenti (Verticale, NS, EO). Gli accelerogrammi naturali possono essere scalati per adeguarli ad esigenze normative. Comunemente si usano quelli artificiali.
- L'analisi consiste in una risoluzione step-by-step delle equazioni di moto. Un tipico tempo di integrazione è di 0.01 o 0.02 sec.
- Vengono calcolati e monitorati tutti i rapporti D/C istante per istante.
- Ci sono molte tecniche di integrazione diretta e di norma si scelgono le tecniche più adeguate al caso in esame.
- Si devono utilizzare più accelerogrammi (5 o 7) e a seconda delle normative utilizzate vengono utilizzati o i valori peggiori dei rapporti D/C o valori intermedi.

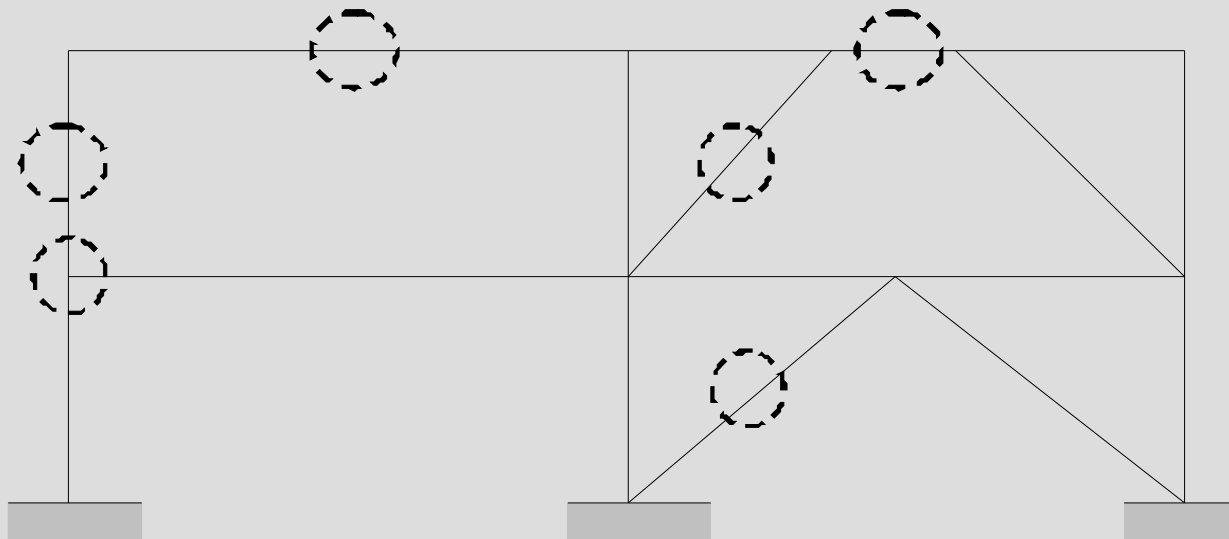
Pushover



Analisi Pushover

1. Si sceglie una distribuzione di forze o una forma di deformazione,
2. Si applica il carico verticale e successivamente quello orizzontale scelto come base per l'analisi Pushover, si traccia la curva Forza-Spostamento del sistema MDOF,
3. Si usa lo spettro di risposta elastico per ottenere la domanda di spostamento,
4. Allo spostamento domandato si verifica lo stato di danneggiamento della struttura e lo si confronta con quello di stati limite imposti.

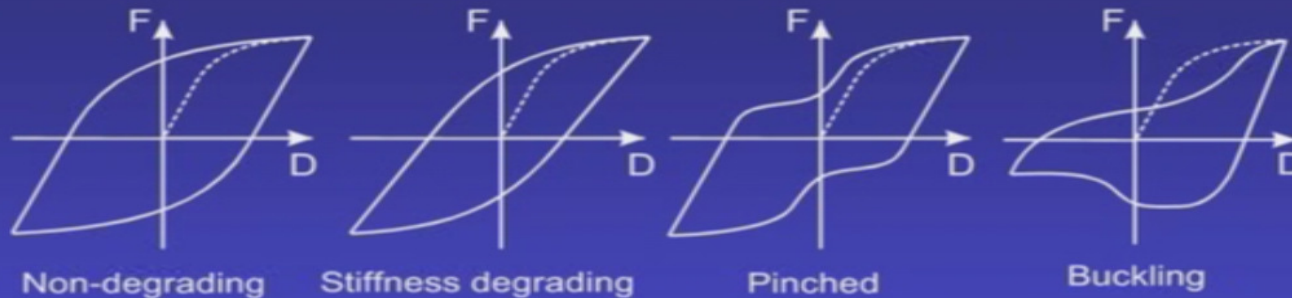
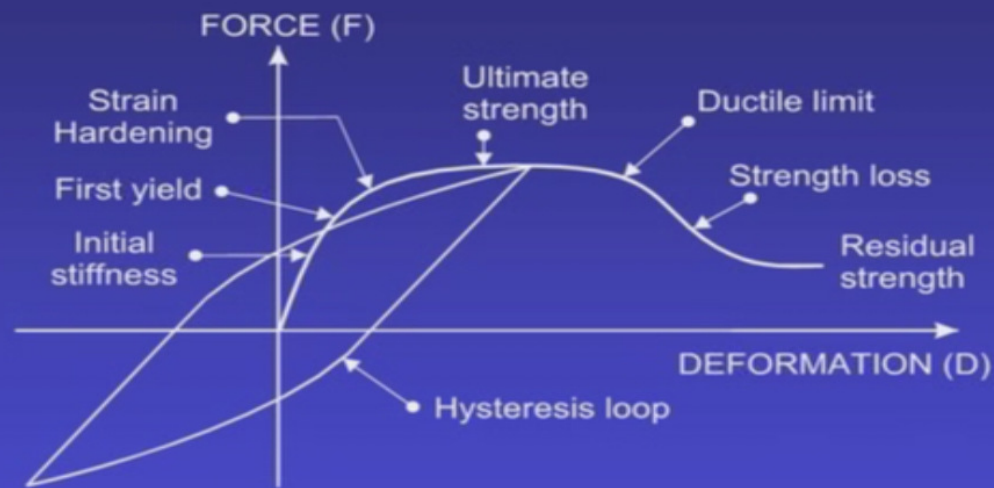
•Componenti per strutture intelaiate



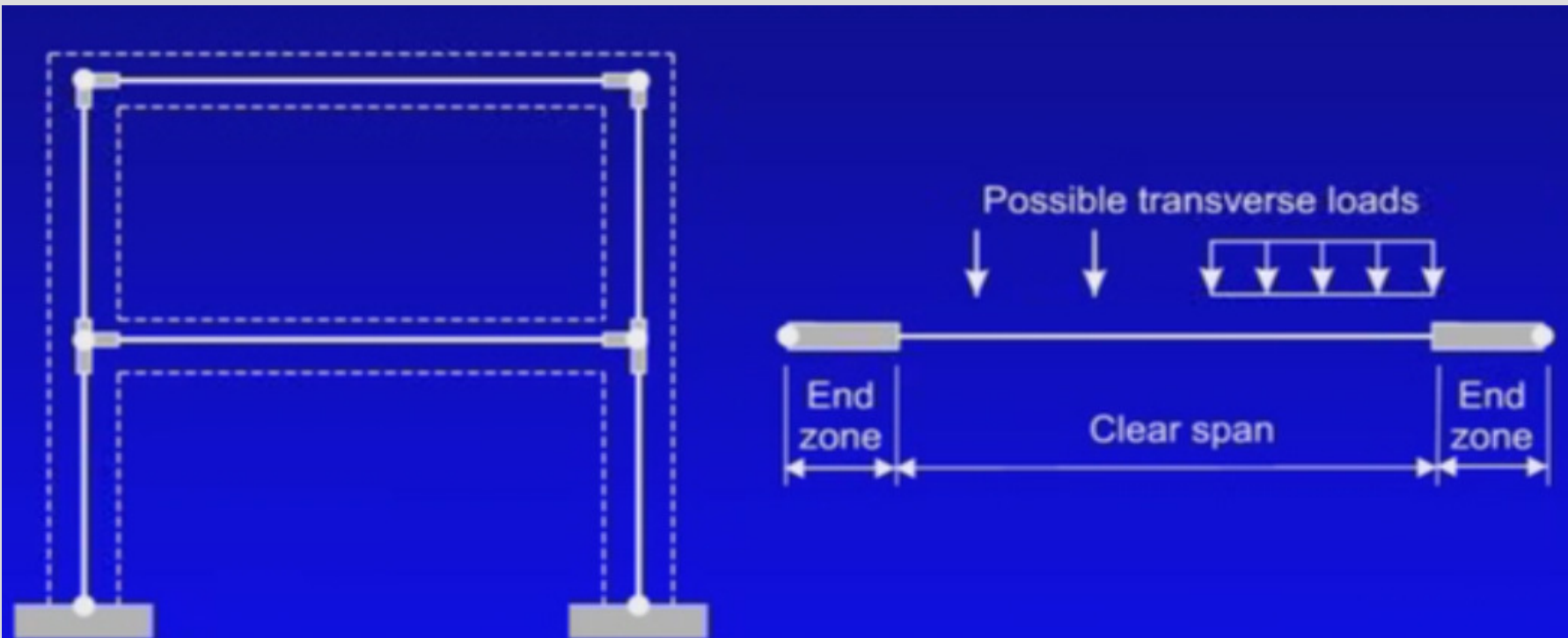
- Per ciascuna componente è necessario definire in modo ragionevole:
 Funzioni non lineari Forza-Deformazione
 Capacità di deformazione e/o di resistenza
- Deve essere possibile calcolare le Domande
- Il modello migliore è il più modello più semplice in grado di fare il suo lavoro

Legge a comportamento non lineare

Main Aspects of F-D Relationship

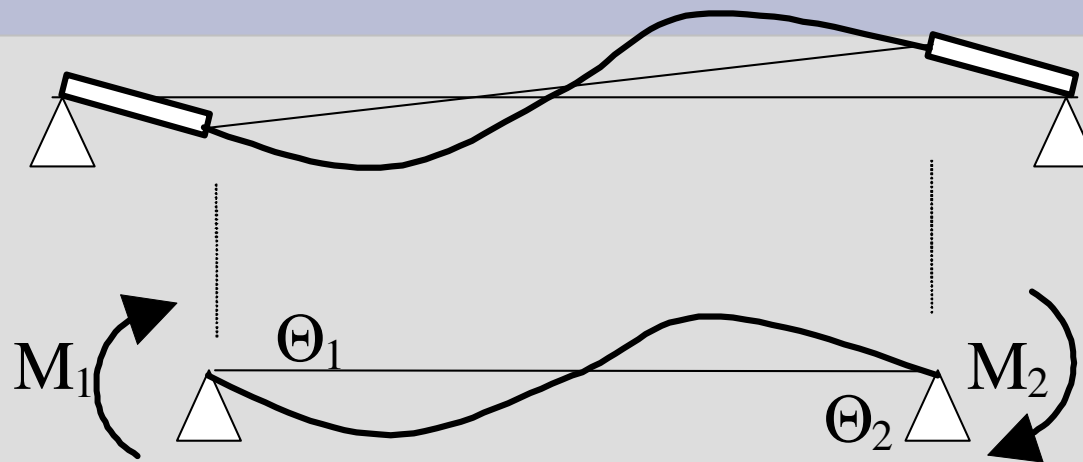


Elemento trave



- End zones are assumed to be stiff and elastic.
- Inelastic behavior can occur in the clear span region.

Elemento trave



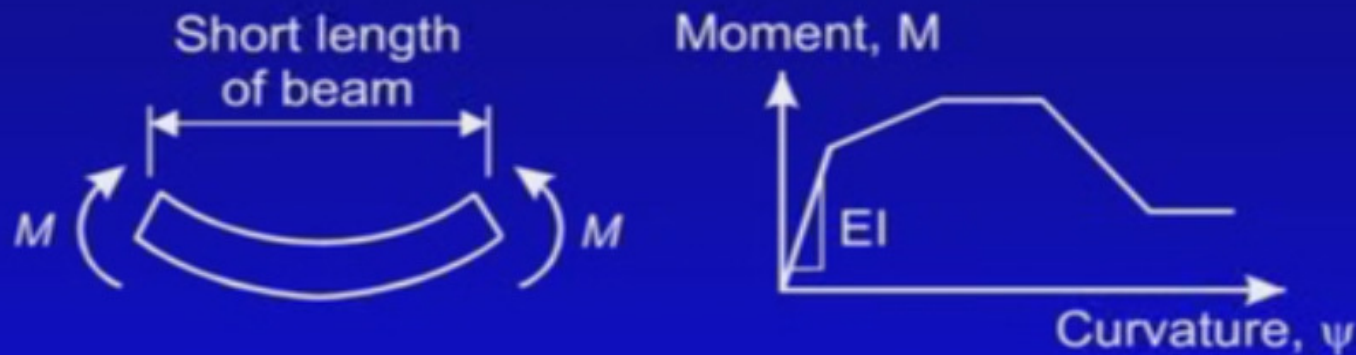
Relazione F- D per le travi

- E' necessario conoscere la funzione della rigidezza tangente con riferimento alla luce netta

$$\begin{bmatrix} dM_i \\ dM_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\theta_i \\ d\theta_j \end{bmatrix}$$

- Deve essere inoltre possibile calcolare i rapporti D/C di deformazione e/o resistenza

(1) Modello esatto



- It is usually not difficult to get the moment-curvature (M - ψ) relationship.
- For an elastic beam, given EI we can use linear beam theory ($\psi = M/EI$) to get the F-D relationship for a complete beam, and use moment as the strength demand-capacity measure.
- For an inelastic beam, the "exact" approach is to use the nonlinear M - ψ relationship, and to use curvature as the deformation demand-capacity measure.

Ma la teoria “esatta” non è pratica

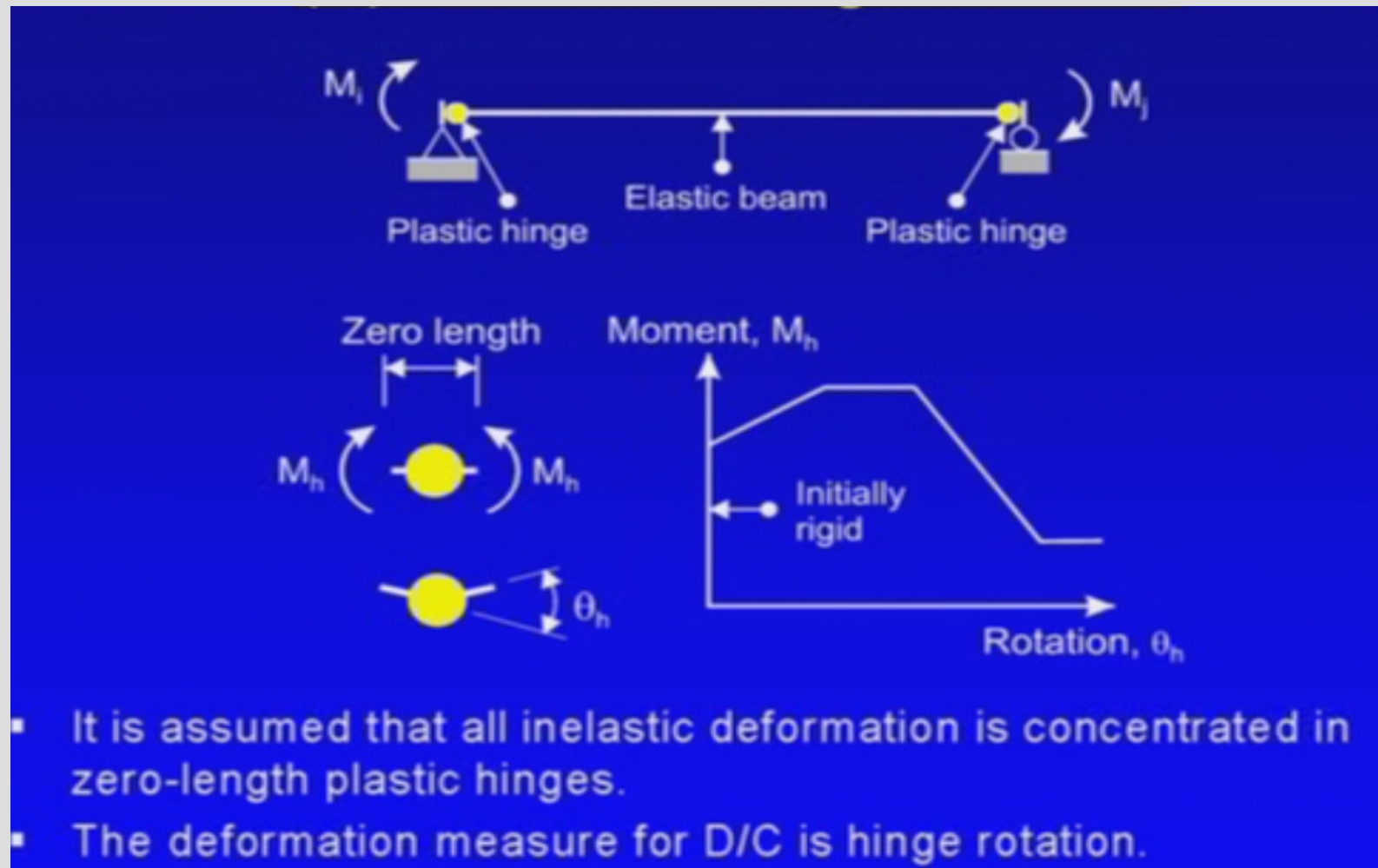
- Bending moment is a good strength measure, but curvature is a poor deformation measure.
- The reason : it is not difficult to get the curvature capacity. However, the curvature demand (the calculated maximum curvature) is very sensitive to the shape of the $M-\psi$ relationship.
- Key point : there is no reliable way to calculate curvature demand.
- For more details see the seminar notes.
- Exact theory for a nonlinear $M-\psi$ relationship is also impractical because it is too complicated.
- In addition, it is not really “exact”. For example, it can predict infinite curvature, which is impossible.

(2) Modello a elementi finiti



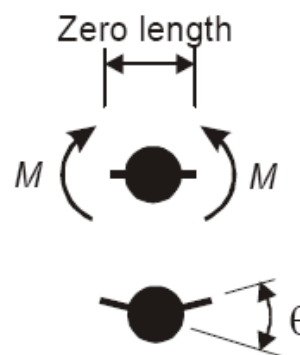
- The finite elements use the $M-\psi$ relationship for the beam.
- For a linear $M-\psi$ relationship, the finer the mesh the more accurate the solution (it approaches "exact" theory).
- For a nonlinear $M-\psi$ relationship it is not so simple.
- One reason is that as the mesh is made finer (i.e., as the element lengths are decreased), the calculated curvature progressively increases. That is, the result is sensitive to changes in the finite element mesh.
- It can also be computationally expensive to divide a beam into many elements.
- This can be used in PERFORM-3D, but it is generally not a practical model.

(3) Modello a cerniera plastica

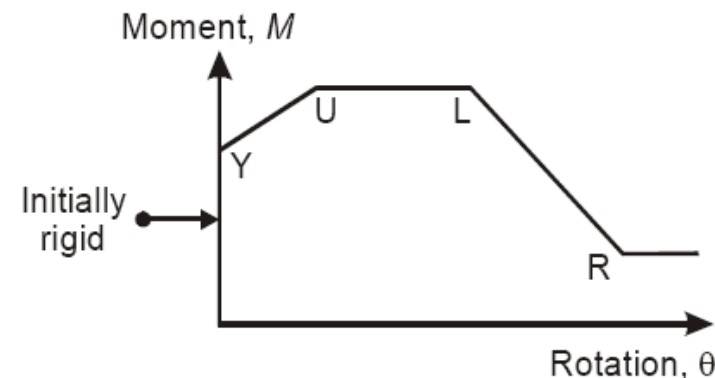


Modello a cerniera plastica

CERNIERA A ROTAZIONE



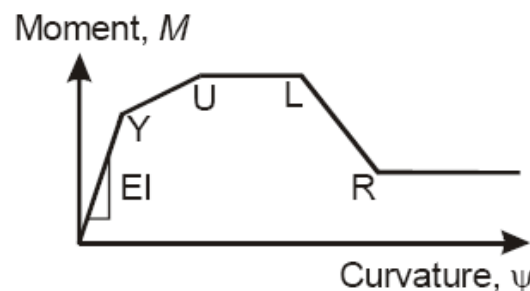
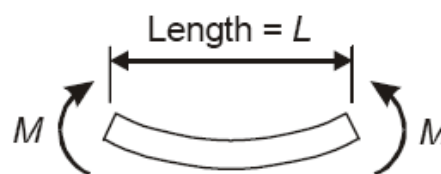
(a) Action and Deformation



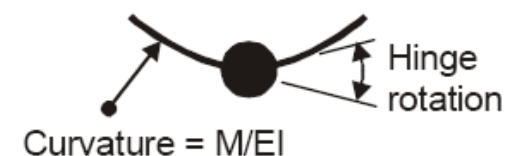
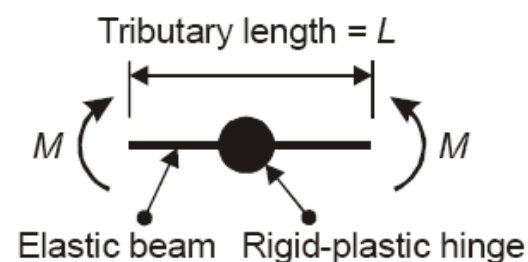
(b) Action-Deformation Relationship

CERNIERA A CURVATURA

Il vantaggio della cerniera a curvatura è che le caratteristiche della cerniera sono indipendenti dalla lunghezza tributaria. La lunghezza viene fissata in seguito a livello di "compound component".

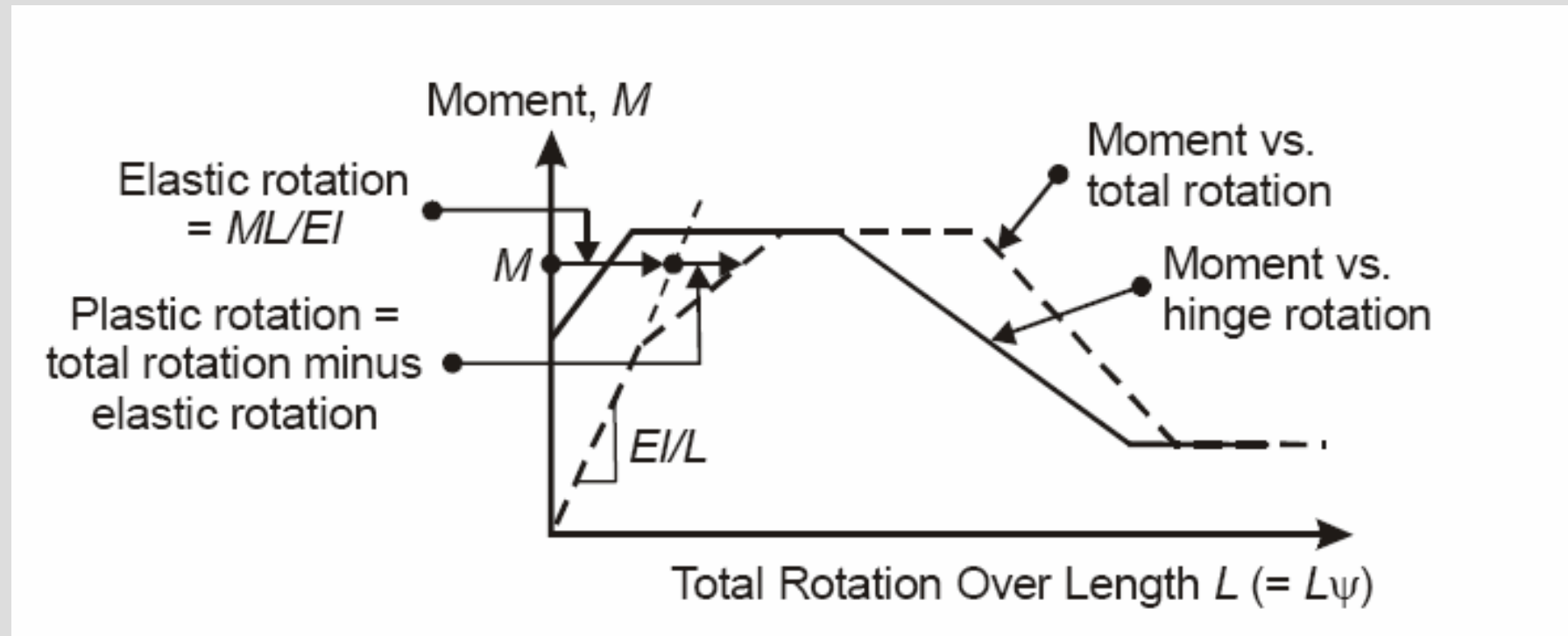


(a) Actual Beam



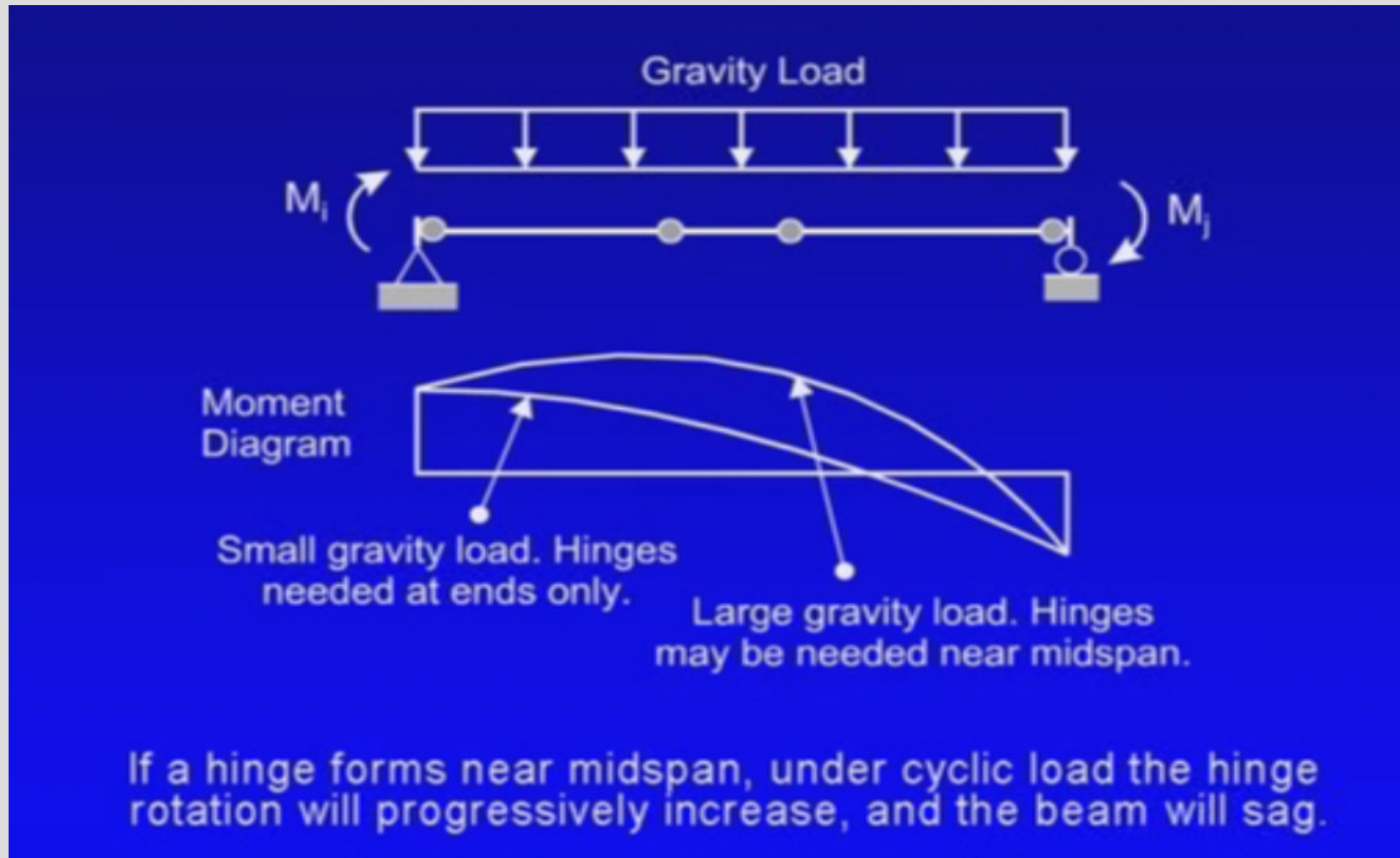
(b) Hinge Equivalent

Modello a cerniera plastica

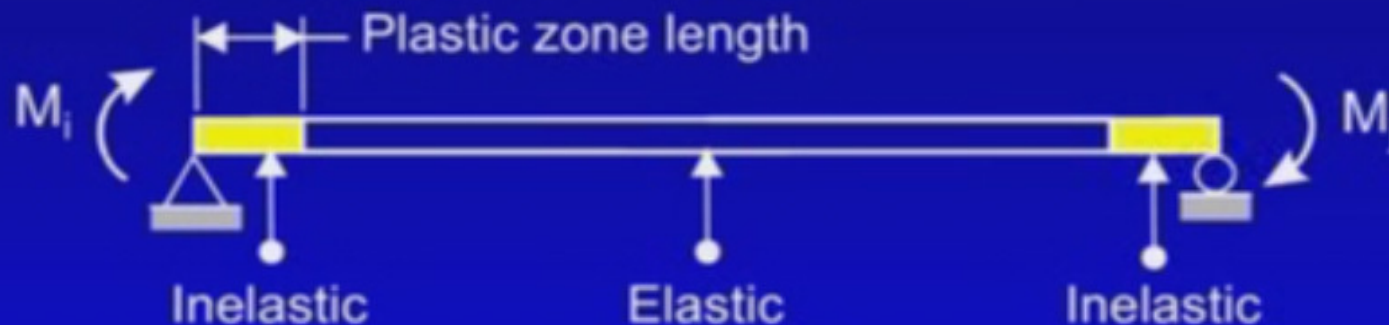


RELAZIONE TRA CERNIERA A ROTAZIONE E A CURVATURA

Modello a cerniere plastiche con carichi verticali

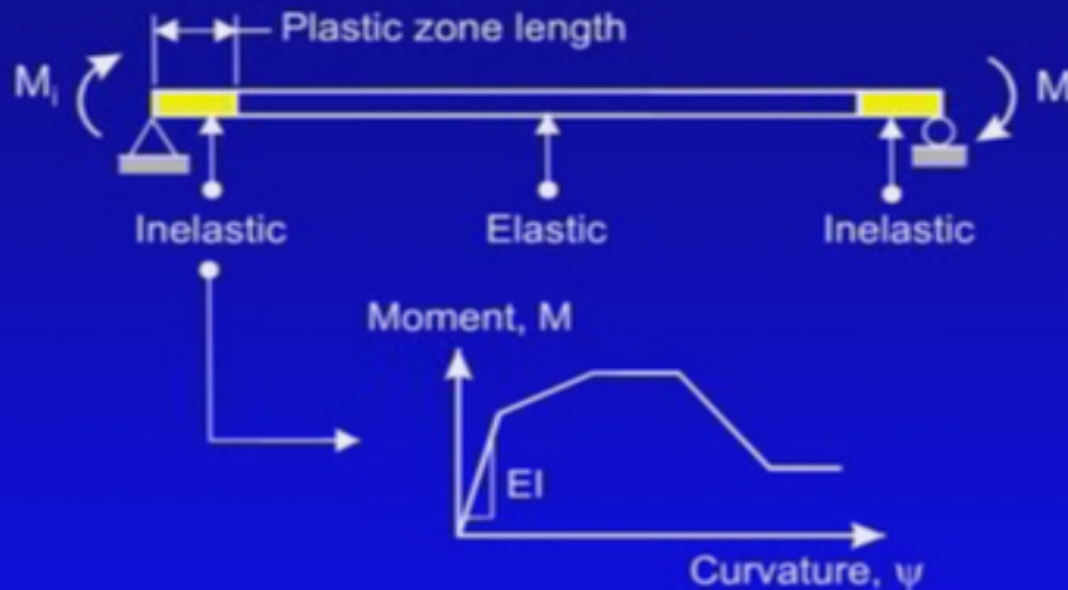


(4) Modello a zona plastica



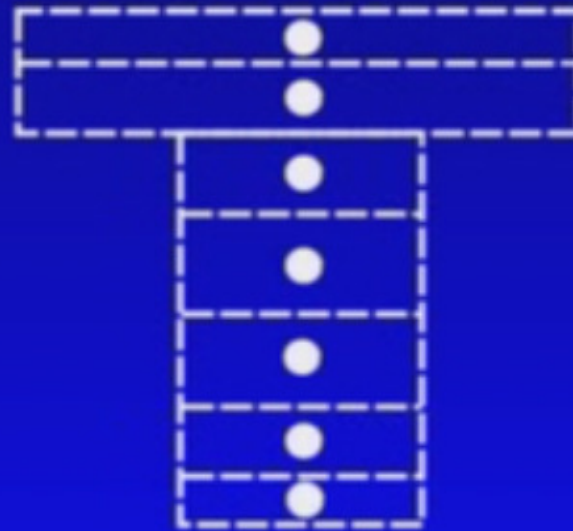
- The inelastic behavior occurs in finite length plastic zones.
- Actual plastic zones usually change length, but models that have variable lengths are too complex.
- The deformation measure for D/C can be :
 - Average curvature in plastic zone.
 - Rotation over plastic zone (= average curvature x plastic zone length).

Lunghezza della zona plastica



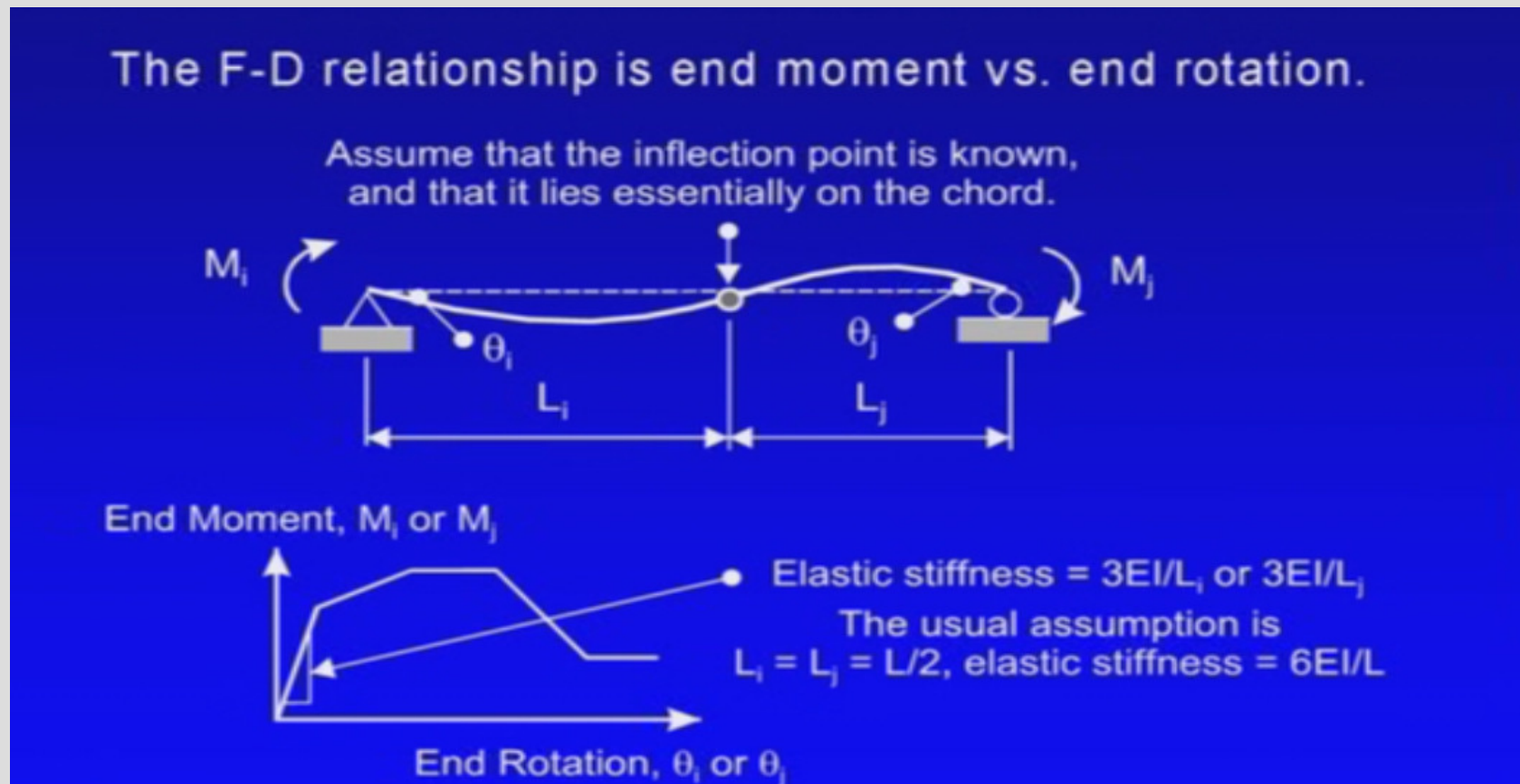
- The plastic zone length must be chosen so that the actual M- ψ relationship for the beam can be used.
- A reasonable length seems to be 0.5 times the beam depth.
- In PERFORM-3D you can use either a "curvature" hinge with a M- ψ relationship, or a fiber cross section where the M- ψ relationship follows from the fiber properties.

Sezione a fibre



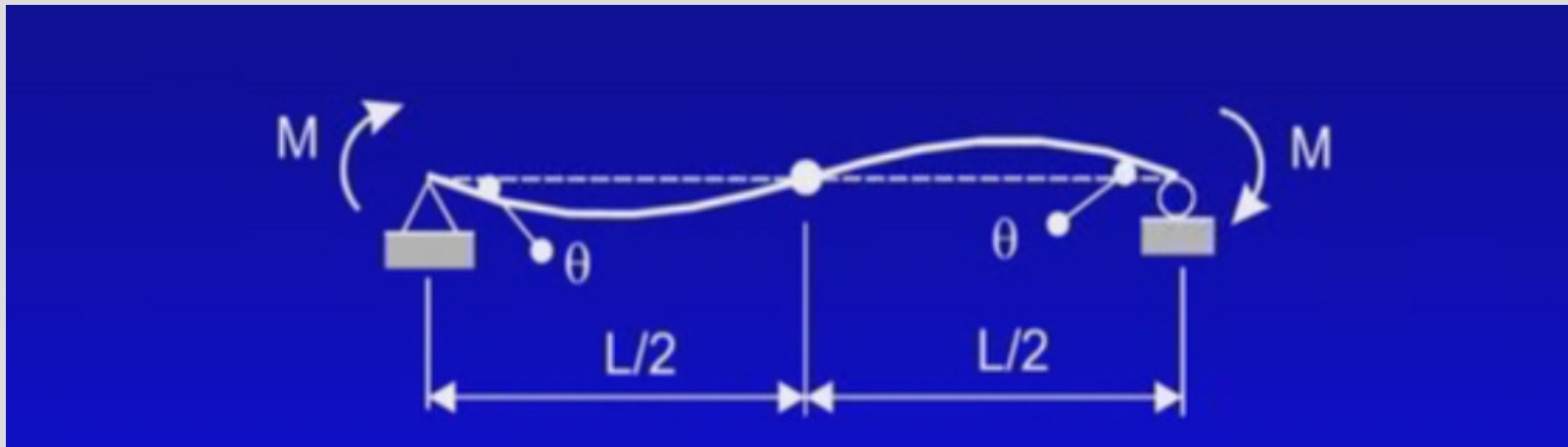
- The cross section is represented by a number of uni-axial fibers.
- The $M-\psi$ relationship follows from the fiber properties, areas and locations.
- The beam is assumed to be elastic for horizontal bending.

(5) Modello a rotazione di corda



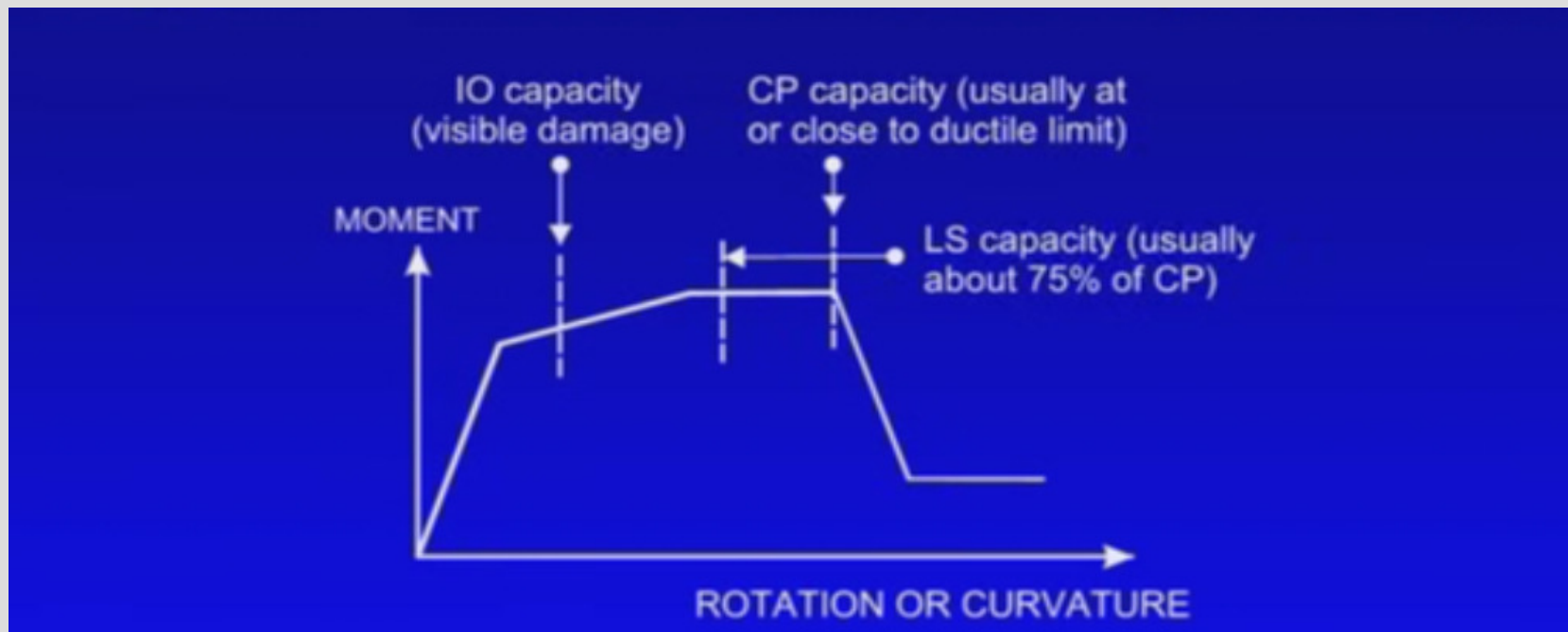
La relazione F-D è il momento d'estremità vs la rotazione d'estremità
 Assume che il punto di flesso sia noto e che si trovi nei pressi della corda
 La rigidezza del tratto elastico è nota: $3EJ/L_i$

Modello a rotazione di corda (cont.)



- È il modello in assoluto più semplice ma il più restrittivo.
- Rigorosamente si applica solo per travi non caricate trasversalmente
- Comunque di solito è ragionevole assumere un punto di flesso in mezzera anche per travi non simmetriche e quando i carichi gravitativi non sono prioritari
- La misura di deformazione per il rapporto D/C è la rotazione di corda

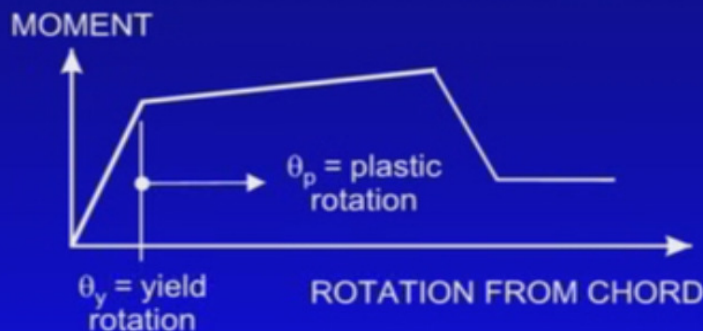
Capacità di deformazione ASCE 41



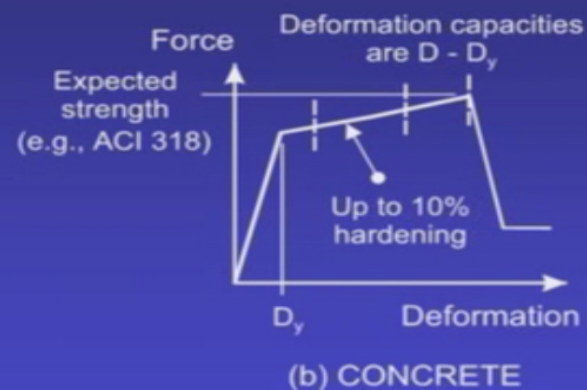
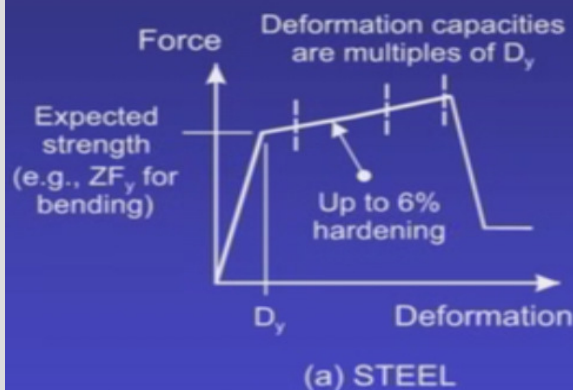
- Può essere usata per ogni tipo di componente
- La capacità di deformazione è stata campionata in molte prove sperimentali
- ASCE 41, FEMA356 e altre norme/linee guida (OPCM e NTC) danno la capacità per molti tipi differenti di membrature: travi, colonne, pareti...
- Per le travi e le colonne le ASCE 41 danno la capacità solo in termini di rotazione di corda.

Capacità ASCE 41

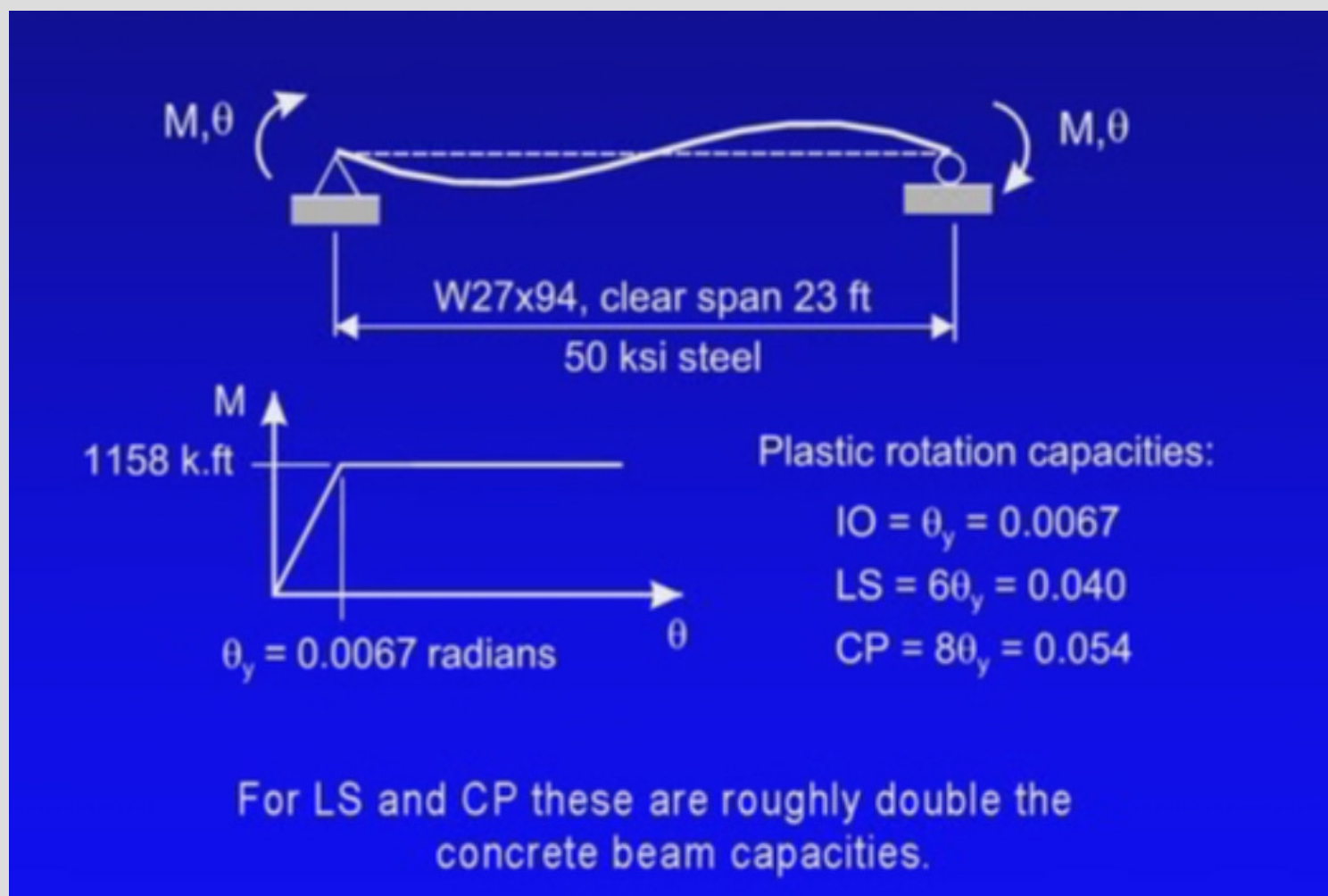
Rotazione di corda



	IO	LS	CP
Steel Beam	$\theta_p / \theta_y = 1$	$\theta_p / \theta_y = 6$	$\theta_p / \theta_y = 8$
RC Beam			
Low shear	$\theta_p = 0.01$	$\theta_p = 0.02$	$\theta_p = 0.025$
High shear	$\theta_p = 0.005$	$\theta_p = 0.01$	$\theta_p = 0.02$



Paragone acciaio – c.a.

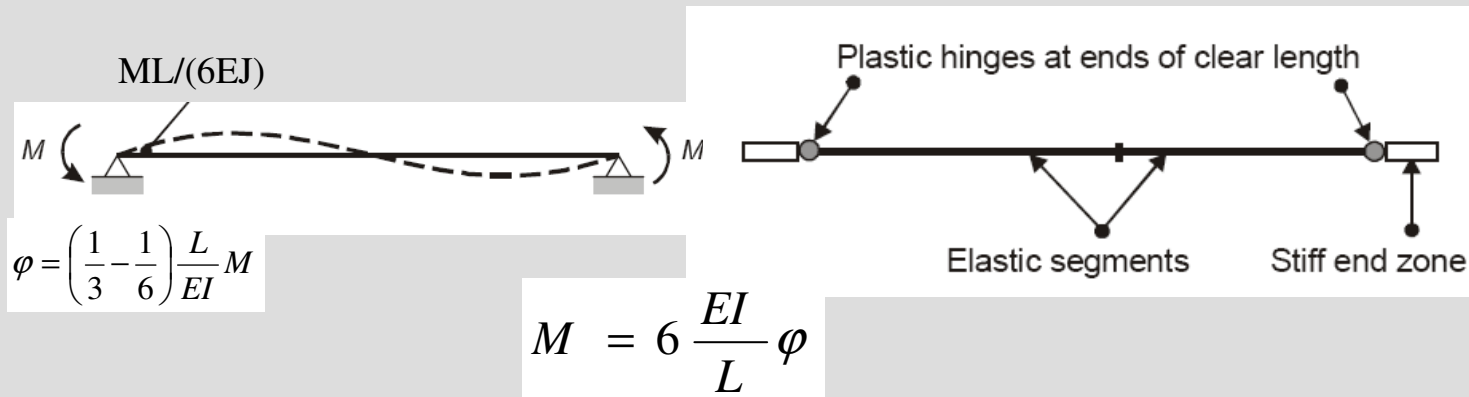


RELAZIONE TRA CERNIERA A ROTAZIONE E A CURVATURA

$$d\varphi = \frac{M}{EI} dz \quad \eta'' = -\frac{M}{EI} \quad \varphi = -\frac{d\eta}{dz}$$

$$\varphi = \frac{1}{3} \frac{M}{EI} L$$

$$\varphi = \frac{1}{6} \frac{M}{EI} L$$



Implementazione in Perform3d di una "FEMA Steel Beam"

1. La componente EJ del tratto elastico sono gli stessi del valore specificato per il componente FEMA,
2. La cerniera all'estremità è una cerniera a curvatura,
3. Il valore della rigidità iniziale della legge Momento-Curvatura è lo stesso del componente FEMA,
4. La lunghezza tributaria della cerniera è 1/3 della lunghezza del componente FEMA (1/6 della lunghezza complessiva di un elemento simmetrico).

Capacità OPCM3274/NTC08

Rotazione di corda

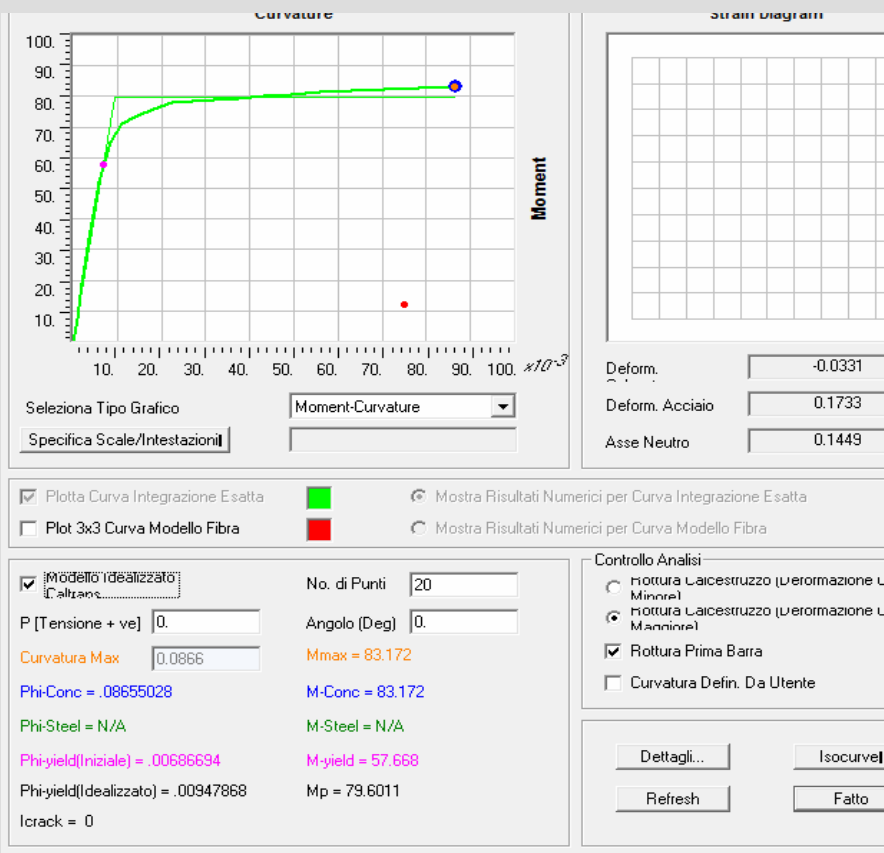
VALUTAZIONI DELLE ROTAZIONI ULTIME ELEMENTI C.A.

$$\vartheta_y = \varphi_y \frac{L_v}{3} + 0.0013 \left(1 + 1.5 \frac{H}{L_v} \right) + 0.13 \varphi_y \frac{d_b \cdot f_y}{\sqrt{f_c}}$$

$$\vartheta_U = \frac{I}{\gamma_{el}} \left(\vartheta_y + (\phi_U - \phi_y) \cdot L_{PL} \cdot \left(1 - \frac{0.5 \cdot L_{PL}}{L_v} \right) \right)$$

$$L_{PL} = 0.1 \cdot L_v + 0.17 \cdot H + 0.24 \frac{d_b \cdot f_y}{\sqrt{f_c}}$$

FC	1.2	(1.35-1.20-1.00)
fc,m	25 MPa	
fy,m	400 MPa	
fc,m	20.8 MPa	
fy,m	333.3 MPa	
h	0.4 m	
M	80 kNm	
V	60 kN	
Lv	1.33 m	M/V
dbl	0.012 m	
Lpl	0.4 m	
pel	1.5	1.5 elementi principali - 1 altrimenti
π	0.0866 rad/m	
π_y	0.00686 rad/m	
π_y	0.004 rad	
π	0.022 rad	



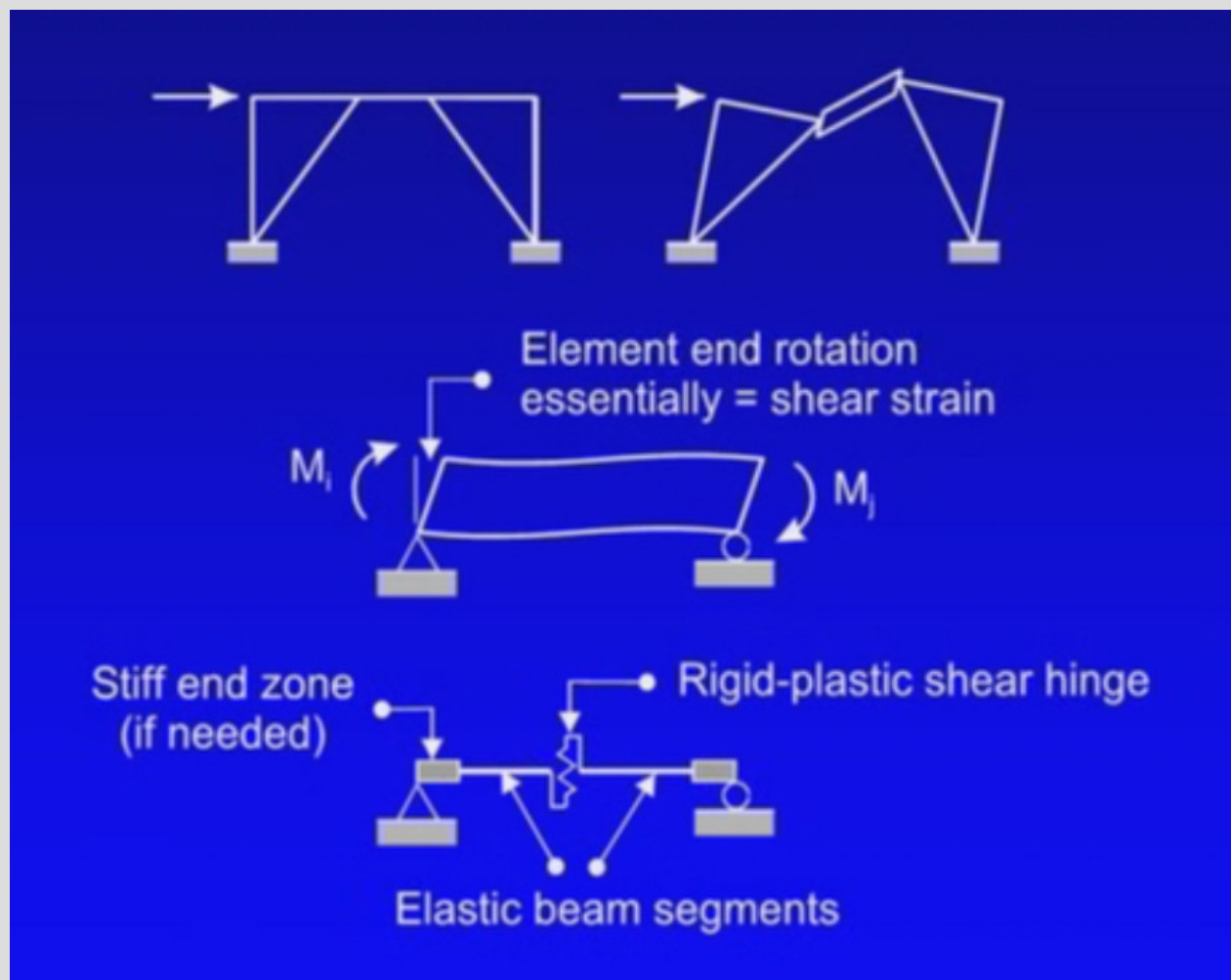
Sommario modellazione travi

- Practical models:
 - (1) Chord rotation model.
Use this model as the first choice.
ASCE 41 gives capacities – an advantage.
 - (2) Plastic hinge model.
Second choice.
 - (3) Plastic zone model.
Third choice.
- Impractical models in most cases:
 - (4) Detailed finite element model.
Might be used for special cases.
 - (5) "Exact" beam theory.
Don't even think about it.

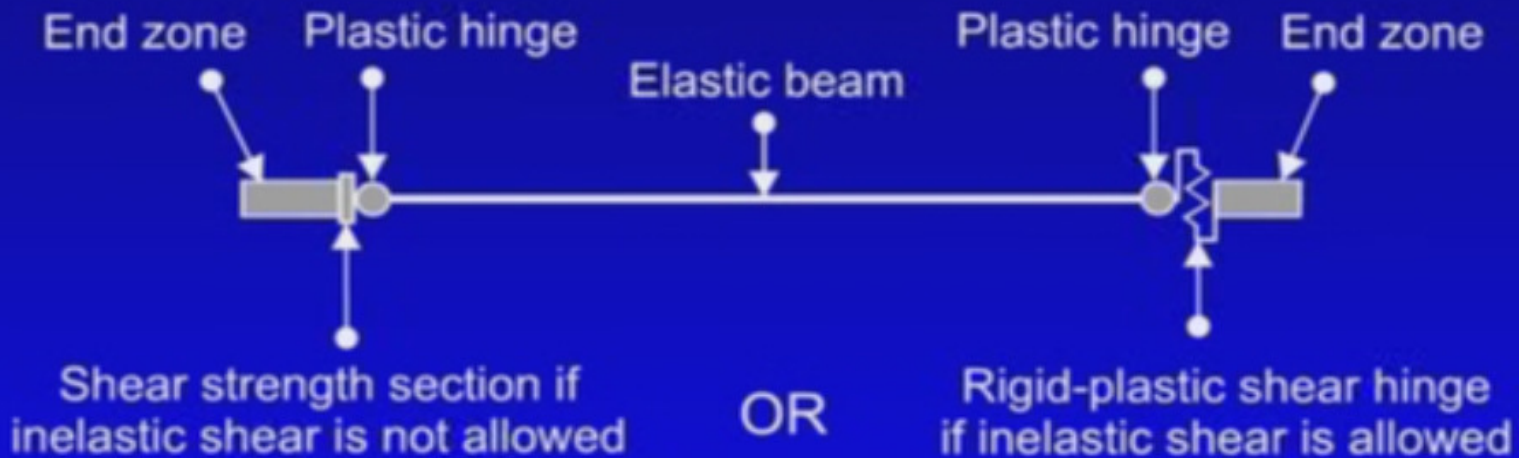
Taglio nelle travi

- Steel beams :
 - Rarely yield in shear.
 - One exception is shear link in EBF.
- Concrete beams :
 - Usually brittle in shear.
 - Hence usually design for strength.
- If inelastic behavior in shear is allowed, it requires a shear "hinge".
- The D-C measure for deformation can be shear displacement across the hinge.
- Alternatively it can be shear strain = shear displacement divided by the member length.

Cerniera a taglio in travi con controventi eccentrici



Taglio in travi in c.a.

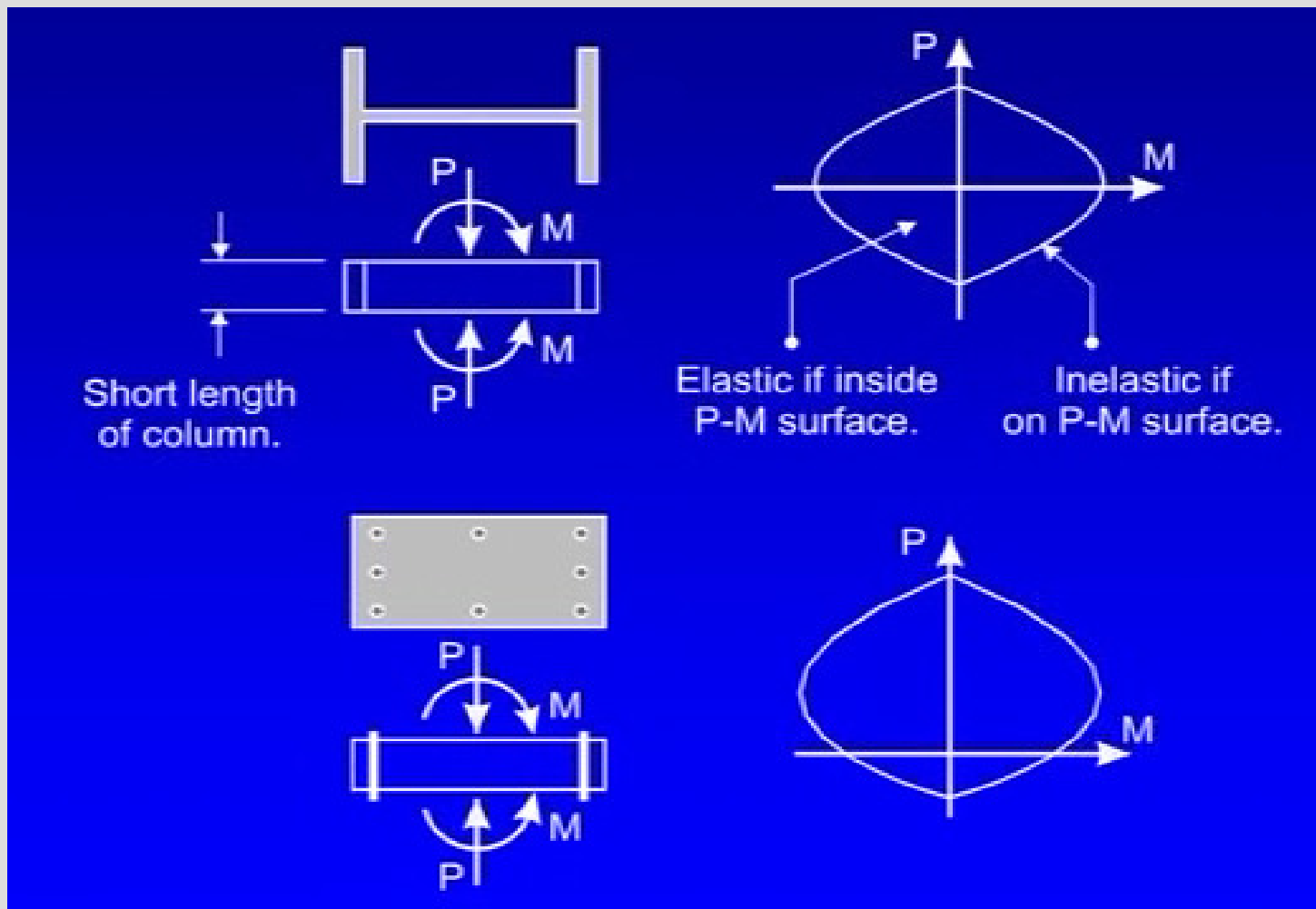


- If a strength section is used, calculate the shear force and hence the strength D/C ratio.
- If a shear hinge is used, calculate the shear displacement, and hence the deformation D/C ratio.
- Chord Rotation and Plastic Zone models can also be used.

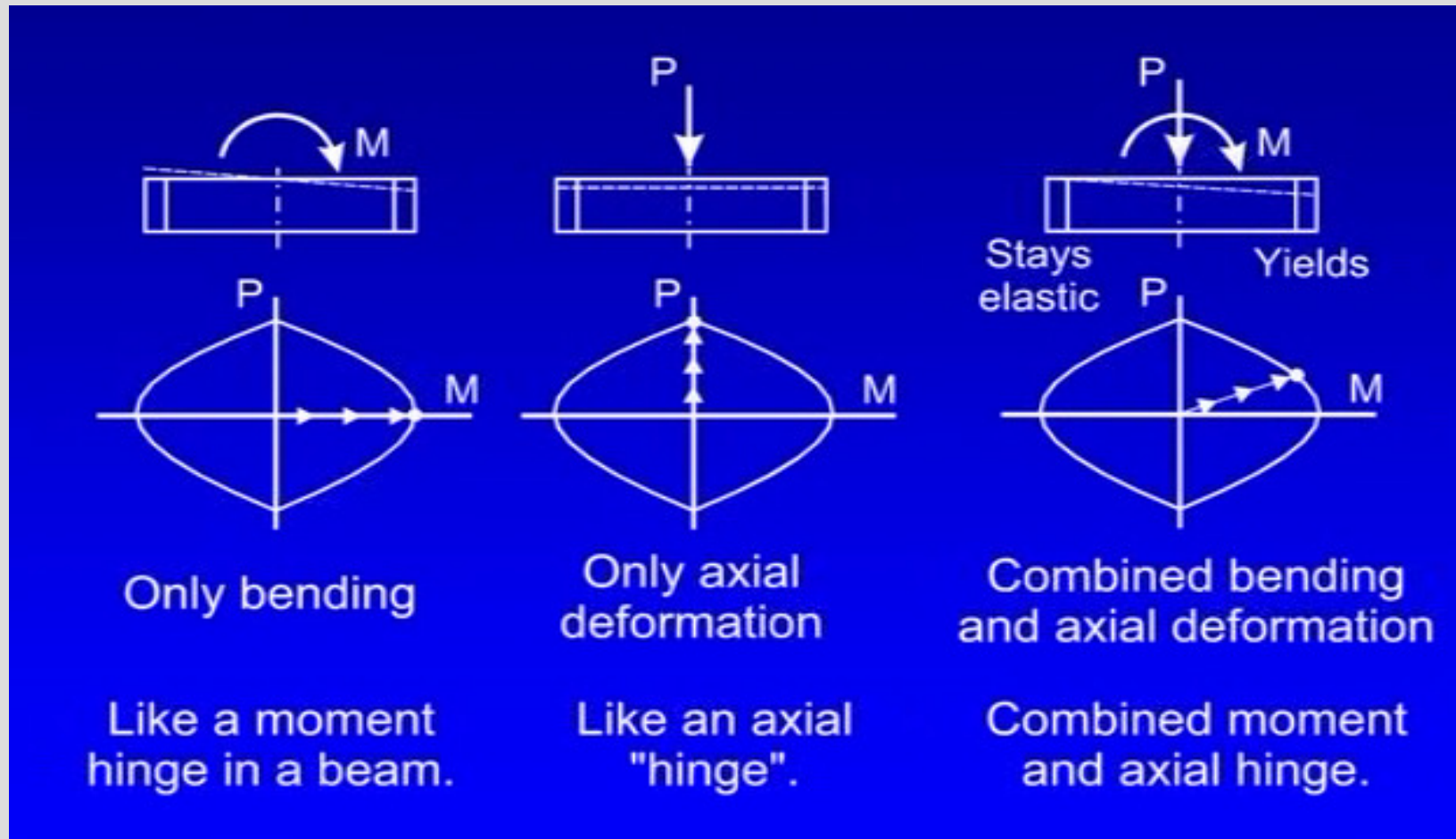
Modellazione pilastri

- The basic models are the same as for beams :
 - chord rotation
 - plastic hinge
 - plastic zone
 - finite element or exact theory
- But the behavior is complicated by P-M-M interaction :
 - M strength depends on P, and vice versa.
 - Moments act about two axes.
 - Hinge behavior after yield is complex – not just rotation.
- Also, shear behavior is more complex :
 - Shears act along two axes.
 - Shear strength can be affected by P and M.

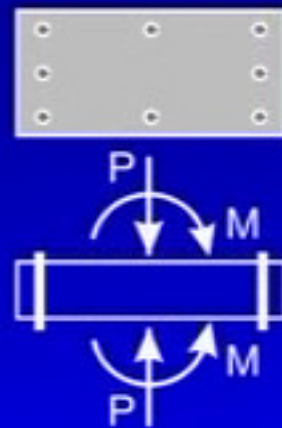
Dominio di interazione P-M



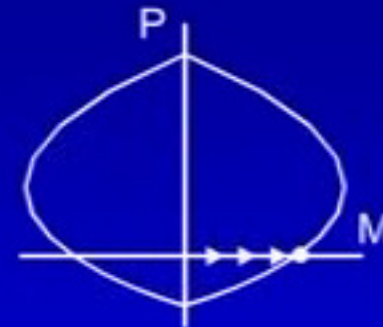
Comportamento inelastico di una sezione in acciaio



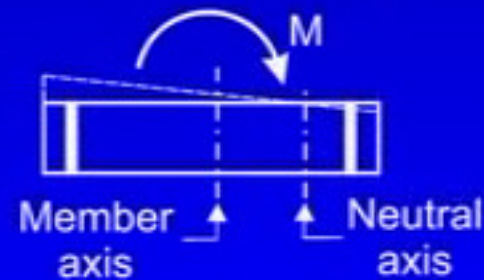
Comportamento inelastico di una sezione in c.a.



Neutral axis shifts. Member axis has both bending and extension.



M only, with $P = 0$.



Plasticity theory does not really apply to this case, because the behavior involves cracking, which is not plastic. However, plasticity theory is often used.

Modelli P-M per elementi pilastro

- Each model requires two F-D relationships, linked by plasticity theory.
- Chord rotation model :
 - End moment vs. end rotation, as for a beam.
 - Axial force vs. axial deformation (extension or shortening).
- Plastic hinge model :
 - Hinge moment vs. rotation.
 - Hinge axial force vs. axial deformation.

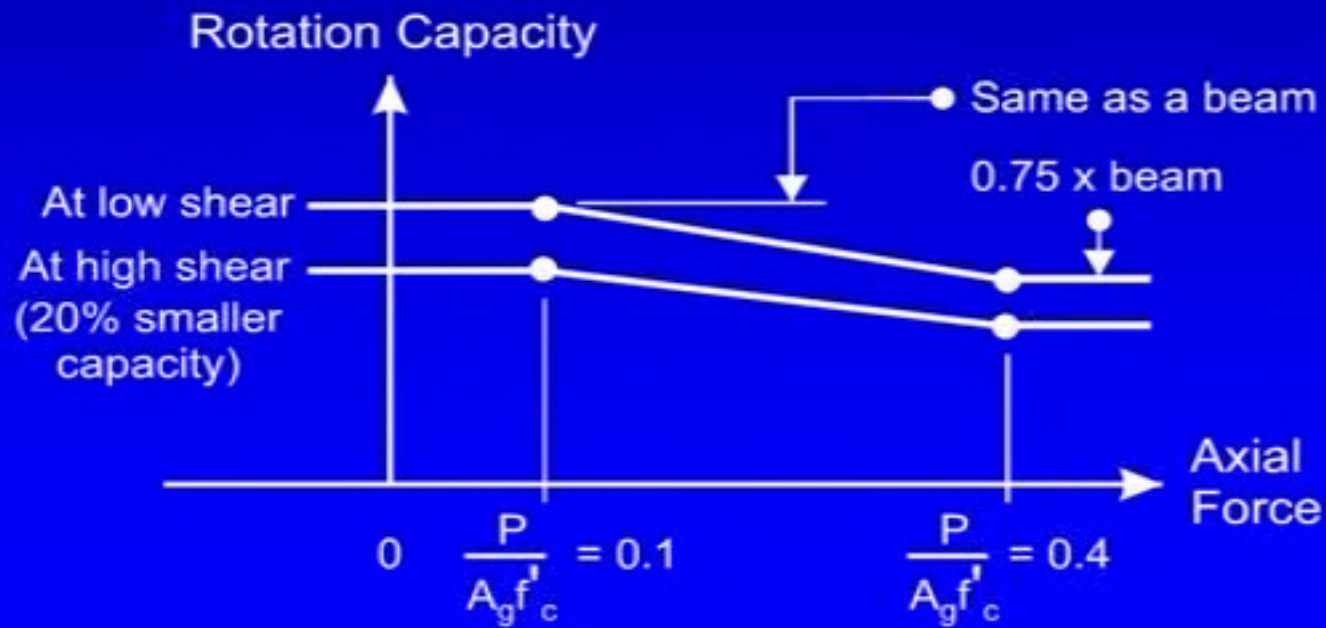
Axial deformation of a zero-length hinge means infinite strain.
This is OK - rotation of a zero length hinge means infinite curvature.
- Plastic zone, finite element and exact models :
 - Moment vs. curvature.
 - Axial force vs. axial strain (measured at the cross section centroid).

Capacità a deformazione dei pilastri

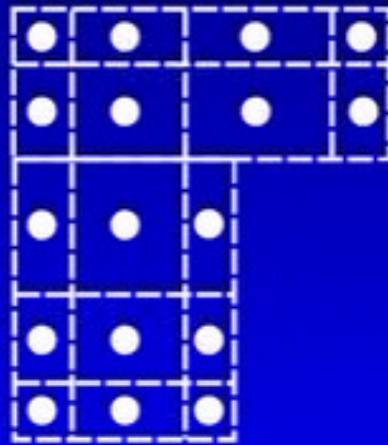
- Because of P-M interaction, column hinges or plastic zones have both axial and bending deformations.
- The deformation D-C measure is usually bending deformation (rotation) only, not on axial deformation.
- One complication is that the bending ductility is smaller if the axial compression force, P , is large. Hence the rotation capacity depends on P .
- A second complication (for reinforced concrete columns) is that the bending ductility is smaller if the shear force, V , is large. Hence the rotation capacity can depend on V .

Capacità dei pilastri in c.a. per ASCE 41

- ASCE 41 gives bending capacities for the chord rotation model only.
- For a concrete column the chord rotation capacity depends on the axial and shear forces, as shown below. For details see ASCE 41.



Sezione a fibre: alternativa alla teoria della plasticità



- The cross section is represented by a number of uni-axial fibers.
- The $M-\psi$ and $P-\varepsilon$ relationships for a short length of column follow from the fiber properties, areas and locations.
- P-M interaction is automatic. It is not necessary to use plasticity theory.
- But fiber sections are more expensive computationally.

Modellazione murature

- Aspetti principali del comportamento 2D
- Elemento wall elastico
- Modellazione inelastica: flessione
- Modellazione inelastica: taglio
- Altri aspetti

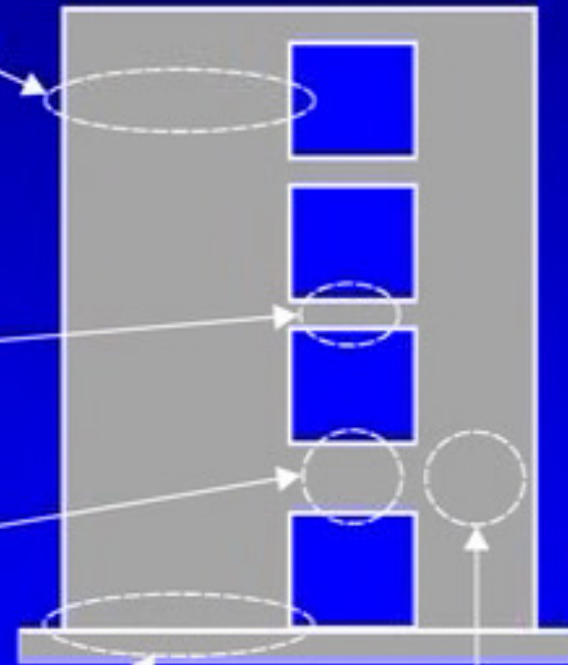
Aspetti principali del comportamento 2D

Piers act much like columns. Plane sections remain essentially plane. May be governed by bending or shear.

Slender coupling beams may be governed by bending or shear.

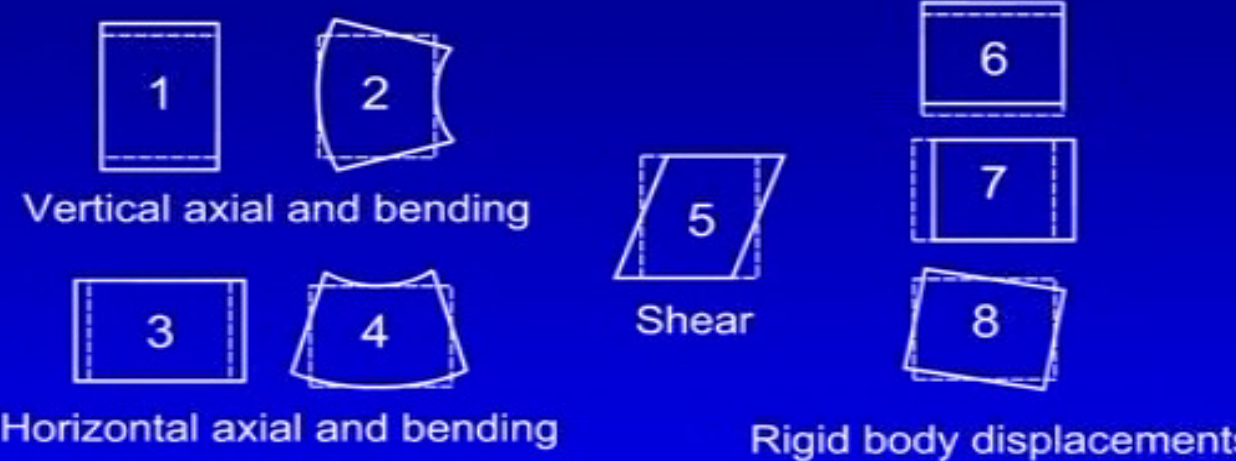
Deep coupling panels are probably governed by shear.

Foundation may not be rigid.



Panel zones are usually not highly stressed.

Elemento wall elastico di Perform



Vertical axial and bending

Horizontal axial and bending

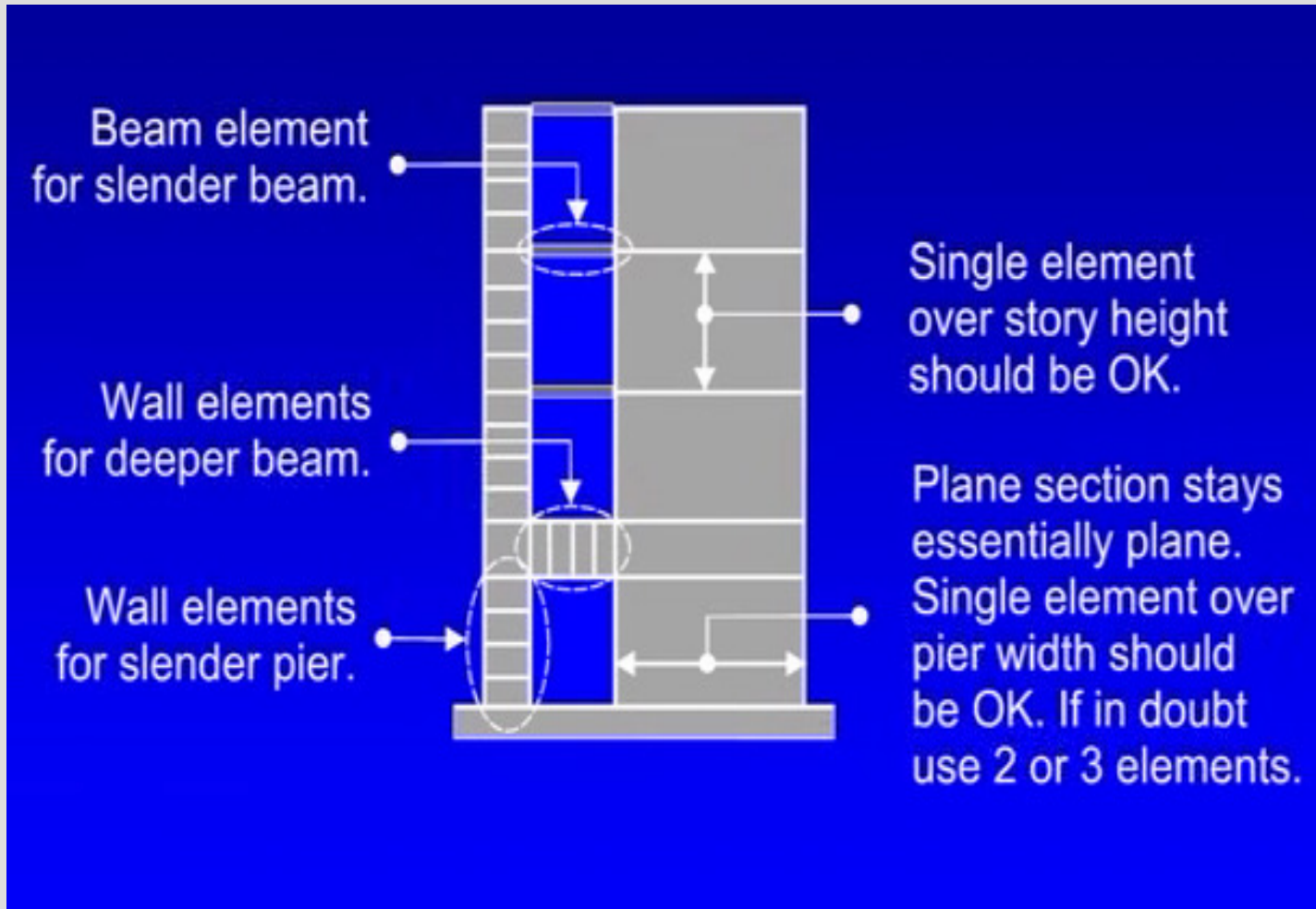
Shear

Rigid body displacements

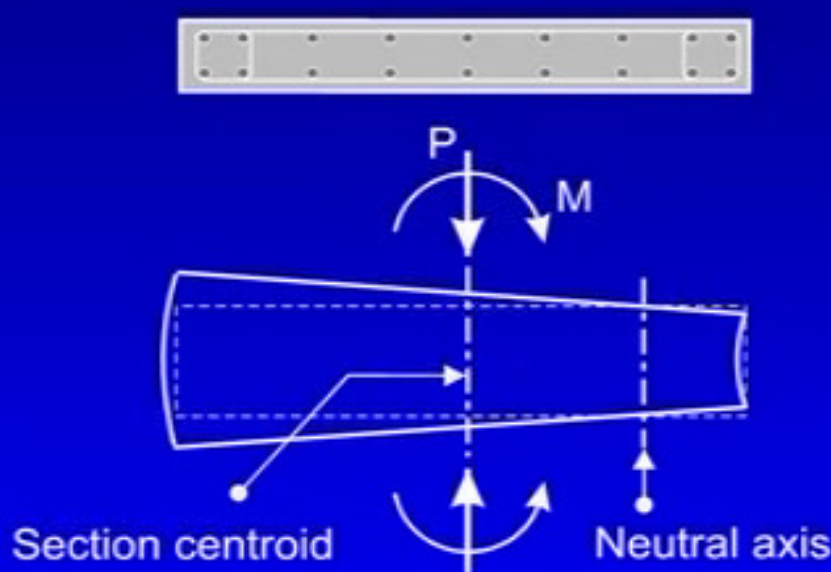
- This is a simple 4-node finite element.
- Axial deformation, curvature and shear strain are all constant over the element.
- Elements do not have to be rectangular, but they should be roughly rectangular.

- Elemento finito a 4 nodi con 8 modi di deformazione: 2 gradi di libertà per nodo.
- Manca il terzo grado di libertà o terzo DOF: la rotazione attorno all'asse perpendicolare

Una mesh ragionevole



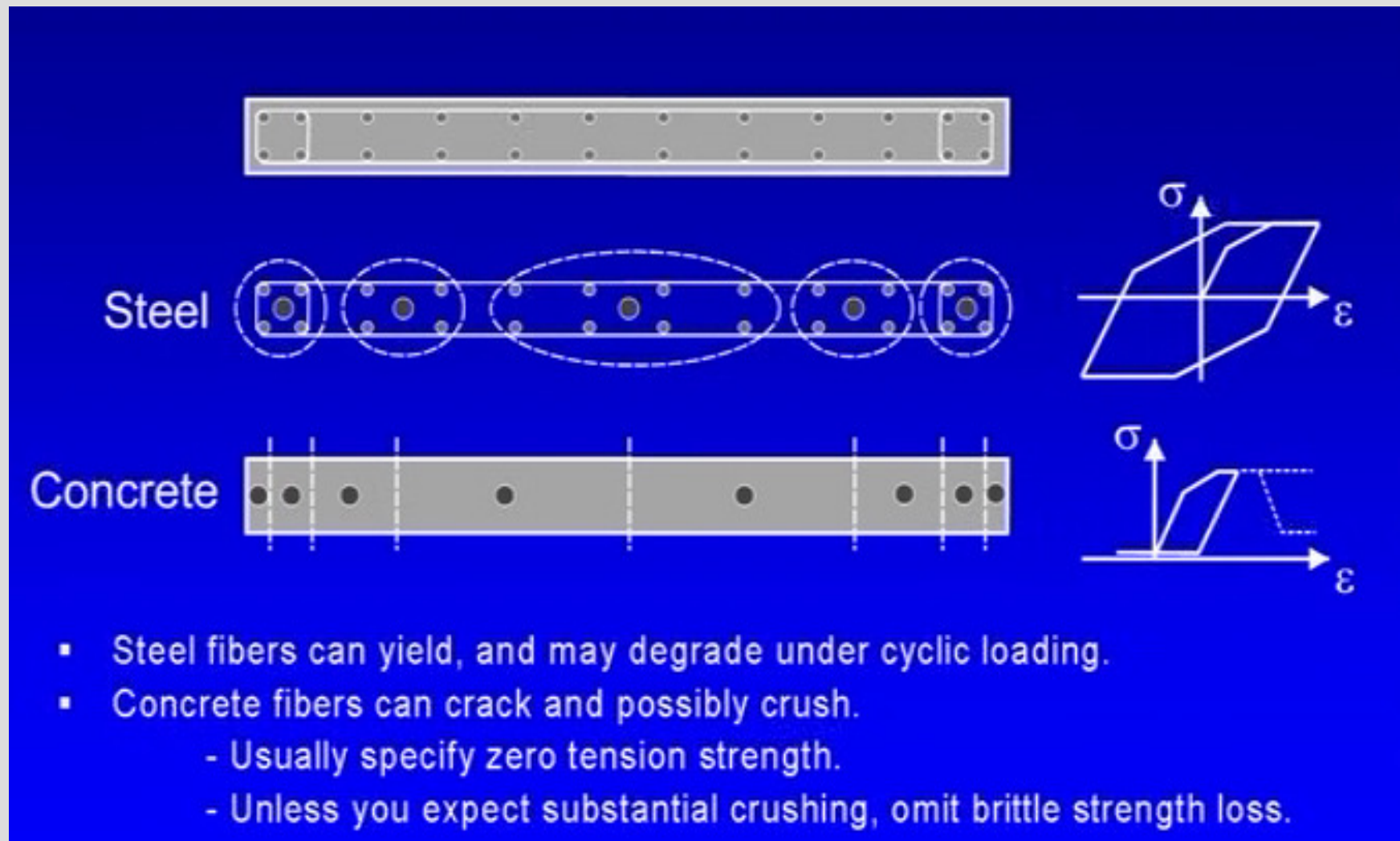
Interazione PMM: un aspetto chiave



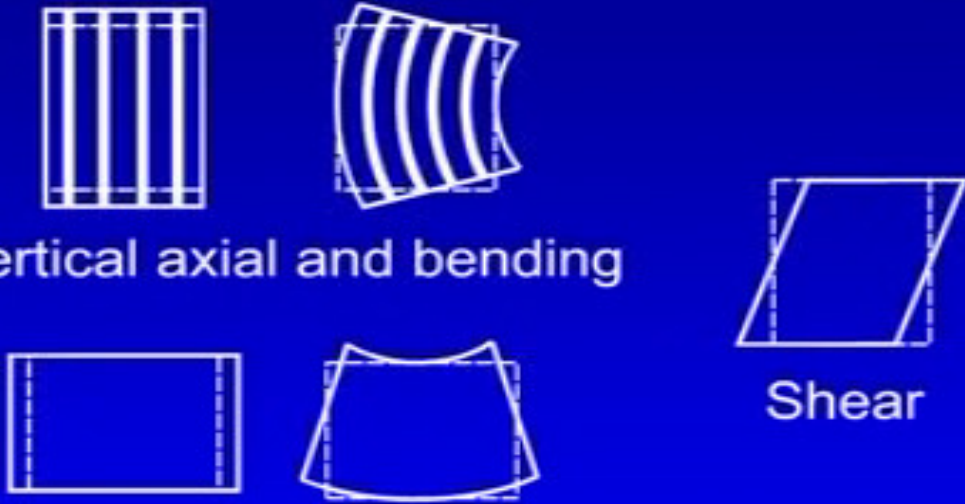
The diagram illustrates the interaction between axial load (P) and bending moment (M) on a beam section. It shows a rectangular cross-section with reinforcement (top), a beam under load P and moment M (middle), and the section centroid and neutral axis (bottom). The neutral axis is shown as a dashed line, and its position is indicated to shift relative to the section centroid.

- The neutral axis location shifts, depending on the P/M ratio and the amount of cracking and yielding.
- Shift of the neutral axis is not modeled in elastic analysis.
- For inelastic analysis in PERFORM-3D, P-M interaction is modeled using fiber sections, not P-M interaction surfaces.

Sezione a fibre



Maschi murari inelastici



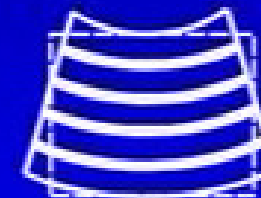
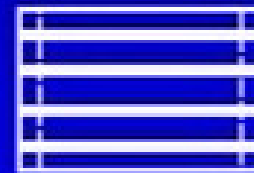
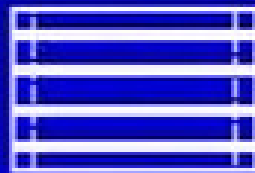
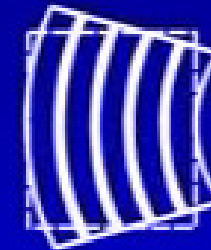
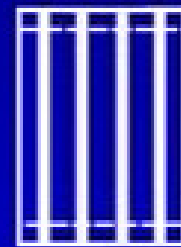
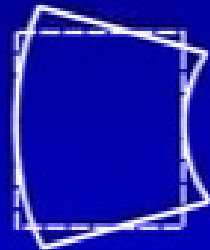
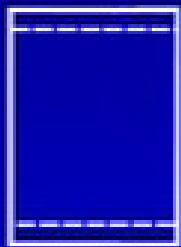
Vertical axial and bending

Horizontal axial and bending

Shear

- The vertical axial and bending deformations affect the fibers. The other deformations do not.
- The fiber section accounts for P-M interaction.
- Consider shear later.

Fasce murarie inelastiche

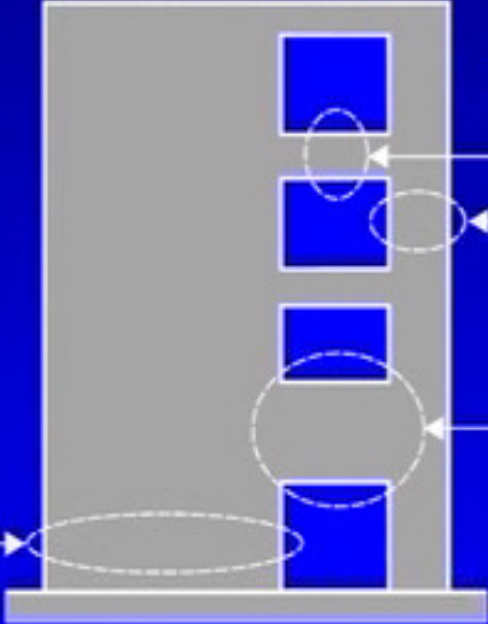


Rotate element so that
fibers are horizontal.

Or use fiber sections
in both directions.

Or use beam elements.

Quante fibre usare?



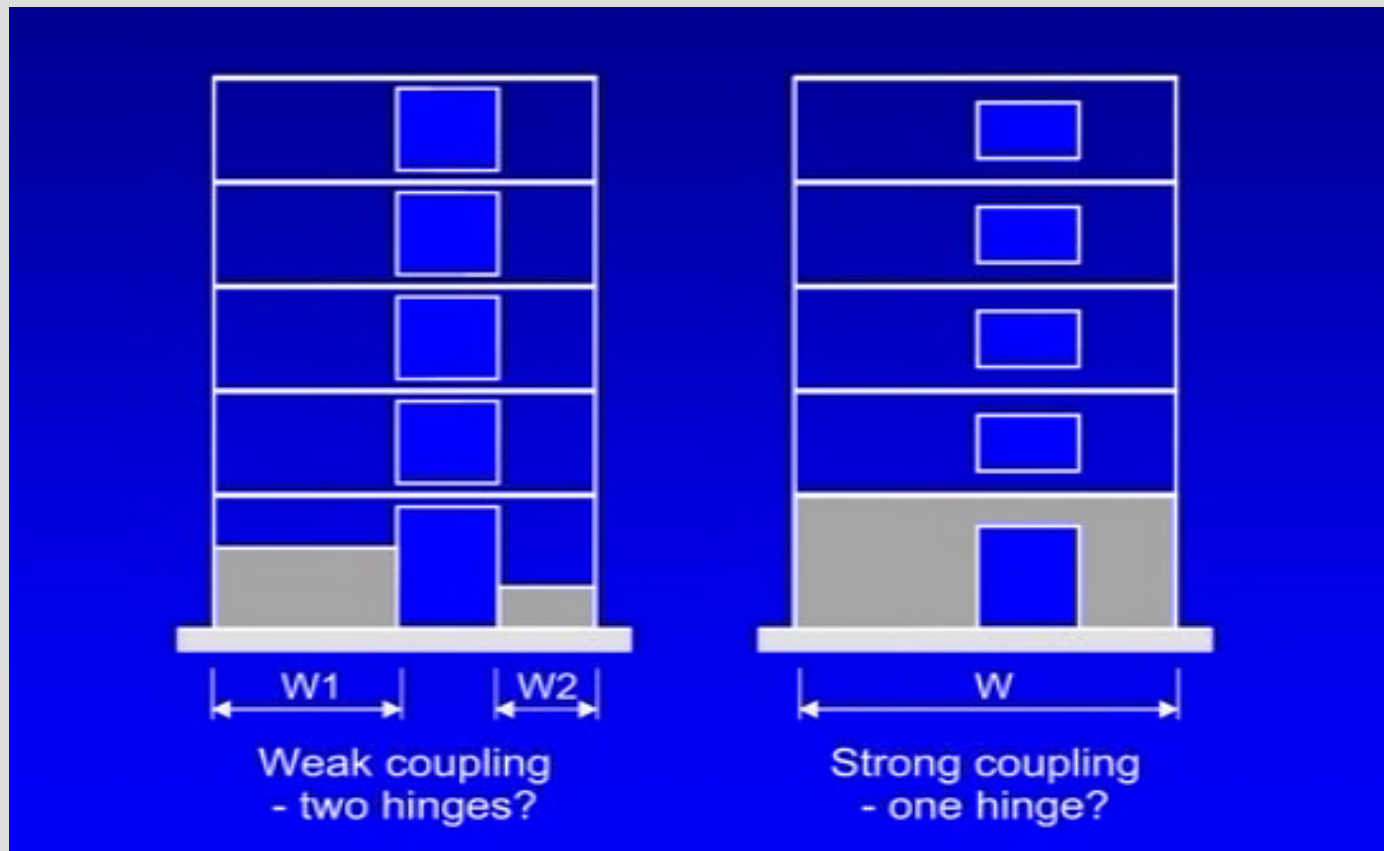
8 to 12 steel fibers and 8 to 12 concrete fibers should be OK for the full width of a wide pier.

Fewer fibers are needed for a beam or a slender pier.

Axial-bending behavior could be elastic for a deep panel controlled by shear.

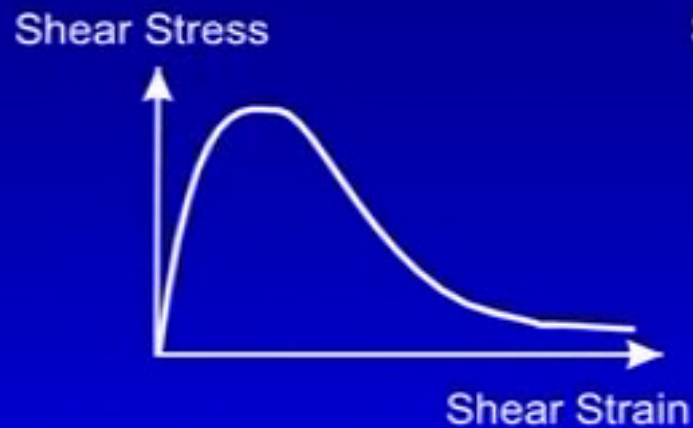
You may need to experiment with a small model of a single pier or beam to decide on the number of fibers.

Posizione della zona plastica

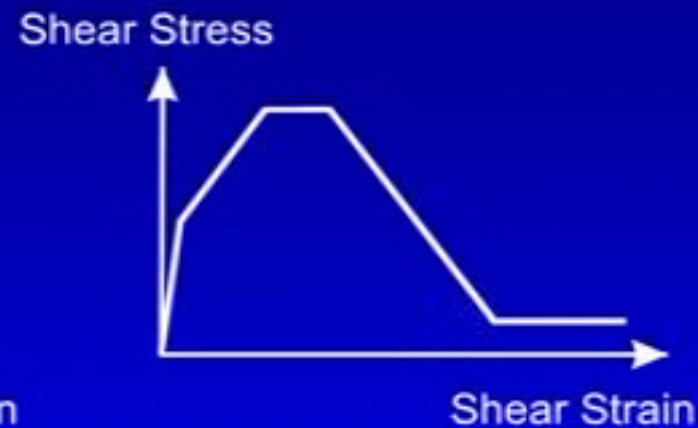


- ASCE 41 prescrive una altezza pari alla metà della larghezza del maschio, ma non più di un piano

Comportamento della muratura a taglio



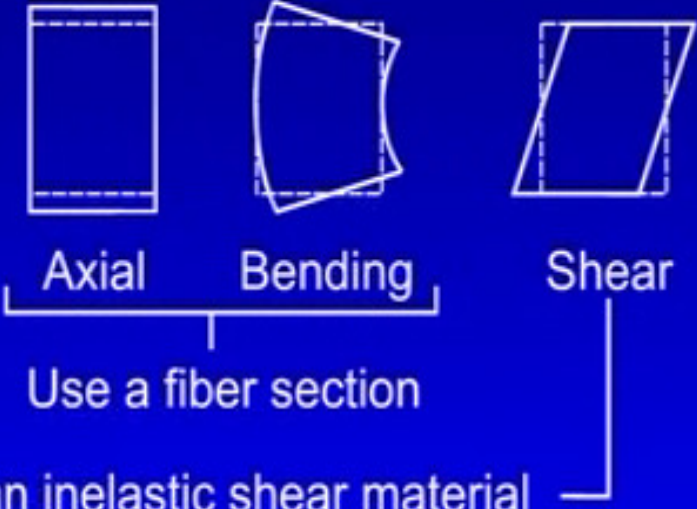
EXPERIMENT



FOR ANALYSIS

- Shear behavior tends to be brittle.
- In PERFORM you can :
 - assume elastic behavior is required, and check strength,
 - or allow inelastic behavior, and check deformation.
- Elastic shear is fairly easy. Inelastic shear is much more complex.

Modellazione a taglio



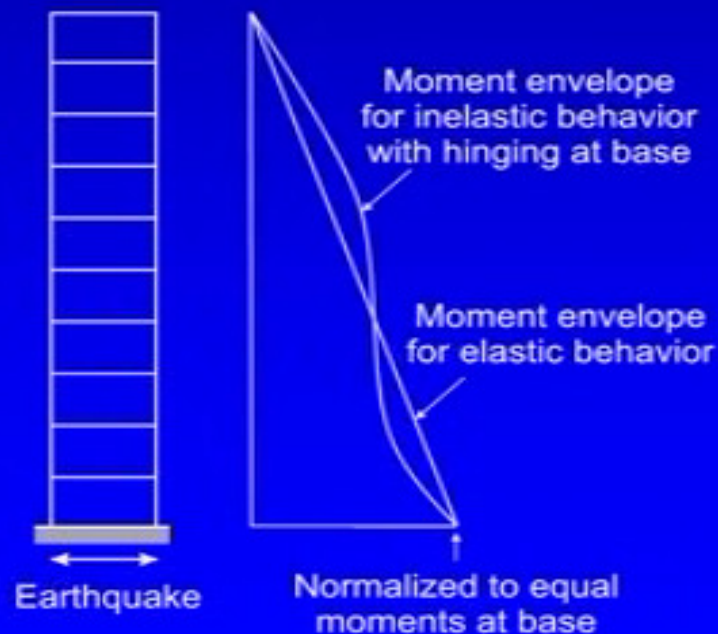
Use a fiber section

Use an inelastic shear material

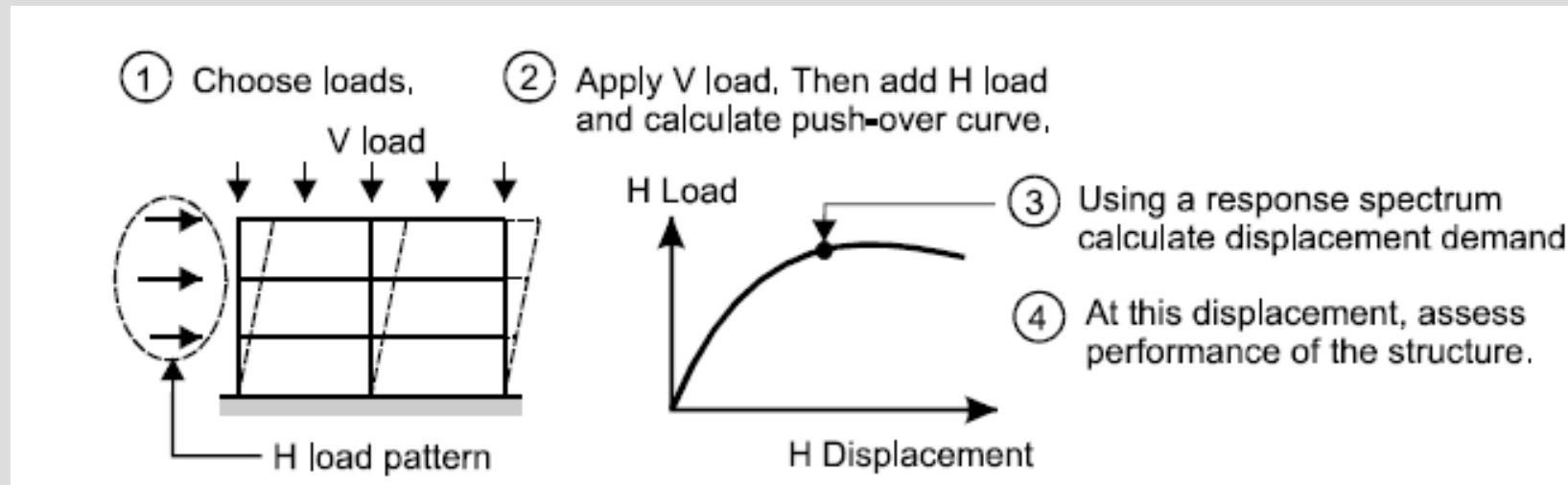
- Shear stress and strain are constant over the element.
- In a pier or beam, the shear force is usually constant over the member length (unlike bending moment).
- Hence there is no need for a “hinge length” for shear.

Inviluppo dei momenti

- When a wall hinges at the base, the maximum bending moments can be very different from the case where the wall remains elastic.
- One explanation is that the higher modes are different when a hinge forms at the base, and they can have a larger effect.
- Elastic analysis can give an incorrect picture of the behavior.



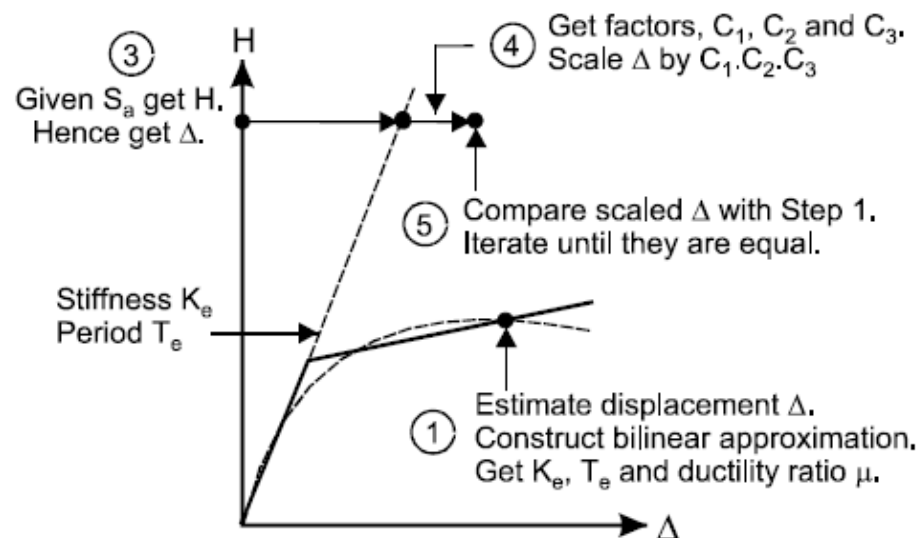
Analisi Pushover



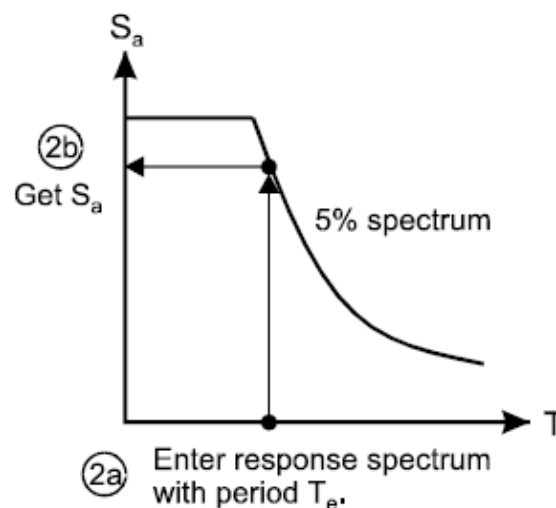
Analisi Pushover

1. Si sceglie una distribuzione di forze o una forma di deformazione,
2. Si applica il carico verticale e successivamente quello orizzontale scelto come base per l'analisi Pushover, si traccia la curva Forza-Spostamento del sistema MDOF,
3. Si usa lo spettro di risposta elastico per ottenere la domanda di spostamento,
4. Allo spostamento domandato si verifica lo stato di danneggiamento della struttura e lo si confronta con quello di stati limite imposti.

Target displacement



$$\delta_t = C_0 C_1 C_2 C_3 S_a \frac{T_e^2}{4\pi^2} g$$



Target displacement

3.3.3.3.2 Target Displacement

The target displacement, δ_t , at each floor level shall be calculated in accordance with Equation (3-15) and as specified in Section 3.3.3.3.1.

$$\delta_t = C_0 C_1 C_2 C_3 S_a \frac{T_e^2}{4\pi^2} g \quad (3-15)$$

where:

C_0 = Modification factor to relate spectral displacement of an equivalent SDOF system to the roof displacement of the building MDOF system calculated using one of the following procedures:

- The first modal participation factor at the level of the control node;
- The modal participation factor at the level of the control node calculated using a shape vector corresponding to the deflected shape of the building at the target displacement. This procedure shall be used if the adaptive load pattern defined in paragraph 2.2 of Section 3.3.3.2.3 is used; or
- The appropriate value from Table 3-2.

C_1 = Modification factor to relate expected maximum inelastic displacements to displacements calculated for linear elastic response:

$$= 1.0 \text{ for } T_e \geq T_S$$

$$= [1.0 + (R - 1)T_S/T_e]/R \text{ for } T_e < T_S$$

but not greater than the values given in Section 3.3.1.3 nor less than 1.0.

T_e = Effective fundamental period of the building in the direction under consideration, sec.

T_S = Characteristic period of the response spectrum, defined as the period associated with the transition from the constant acceleration segment of the spectrum to the constant velocity segment of the spectrum per Sections 1.6.1.5 and 1.6.2.1.

R = Ratio of elastic strength demand to calculated yield strength coefficient calculated by Equation (3-16).

C_2 = Modification factor to represent the effect of pinched hysteretic shape, stiffness degradation and strength deterioration on maximum displacement response. Values of C_2 for different framing systems and Structural Performance Levels shall be obtained from Table 3-3. Alternatively, use of $C_2 = 1.0$ shall be permitted for nonlinear procedures.

C_3 = Modification factor to represent increased displacements due to dynamic P- Δ effects. For buildings with positive post-yield stiffness, C_3 shall be set equal to 1.0. For buildings with negative post-yield stiffness, values of C_3 shall be calculated using Equation (3-17) but not to exceed the values set forth in Section 3.3.1.3.

S_a = Response spectrum acceleration, at the effective fundamental period and damping ratio of the building in the direction under consideration, g , as calculated in Sections 1.6.1.5 and 1.6.2.1.

Target displacement

Table 3-2 Values for Modification Factor C_0 ¹

Number of Stories	Shear Buildings ²		Other Buildings
	Triangular Load Pattern (1.1, 1.2, 1.3)	Uniform Load Pattern (2.1)	Any Load Pattern
1	1.0	1.0	1.0
2	1.2	1.15	1.2
3	1.2	1.2	1.3
5	1.3	1.2	1.4
10+	1.3	1.2	1.5

1. Linear interpolation shall be used to calculate intermediate values.
2. Buildings in which, for all stories, interstory drift decreases with increasing height.

Table 3-3 Values for Modification Factor C_2

Structural Performance Level	$T \leq 0.1$ second ³		$T \geq T_S$ second ³	
	Framing Type 1 ¹	Framing Type 2 ²	Framing Type 1 ¹	Framing Type 2 ²
Immediate Occupancy	1.0	1.0	1.0	1.0
Life Safety	1.3	1.0	1.1	1.0
Collapse Prevention	1.5	1.0	1.2	1.0

1. Structures in which more than 30% of the story shear at any level is resisted by any combination of the following components, elements, or frames: ordinary moment-resisting frames, concentrically-braced frames, frames with partially-restrained connections, tension-only braces, unreinforced masonry walls, shear-critical, piers, and spandrels of reinforced concrete or masonry.
2. All frames not assigned to Framing Type 1.
3. Linear interpolation shall be used for intermediate values of T .

Target displacement

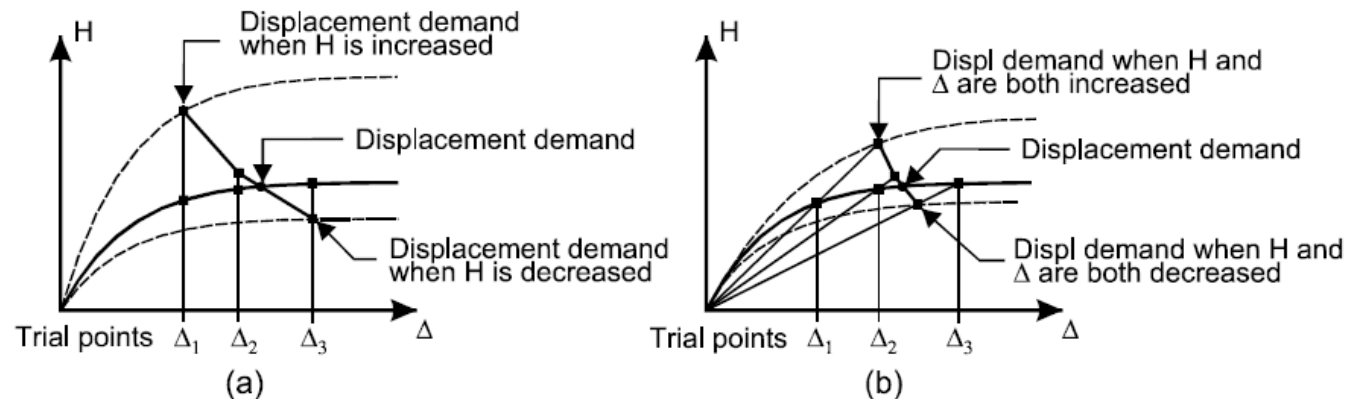


Figure 28.10 Sensitivity Information

Curva di domanda

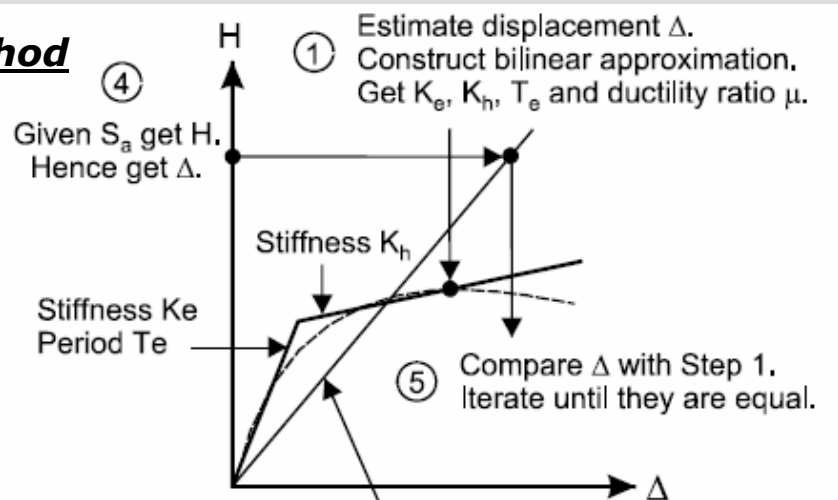
La **figura a)** riporta la curva di capacità ottenuta modificando la rigidezza e la resistenza (mantenendo costante la proporzione). In questo caso le linee a periodo costante sono verticali. Questa figura mostra l'incremento della resistenza (e della rigidezza) da utilizzare al fine di abbattere lo spostamento target.

In **figura b)** riporta la curva di capacità ottenuta variando esclusivamente la resistenza (rigidezza costante). In questo caso le linee a periodo costante sono radiali.

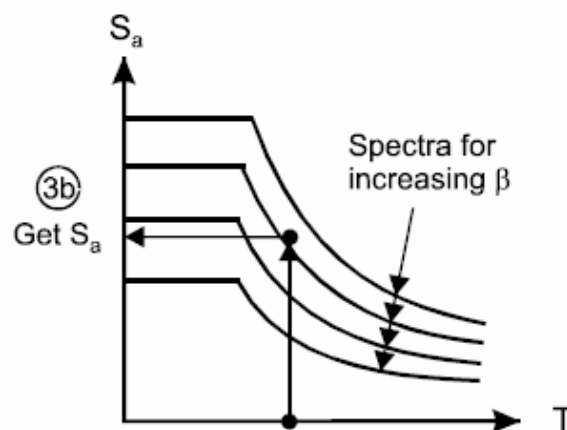
Queste curve possono essere utilizzate per valutare la sensibilità della risposta al variare di rigidezza o resistenza.

Target displacement

FEMA 440 Linearization Method



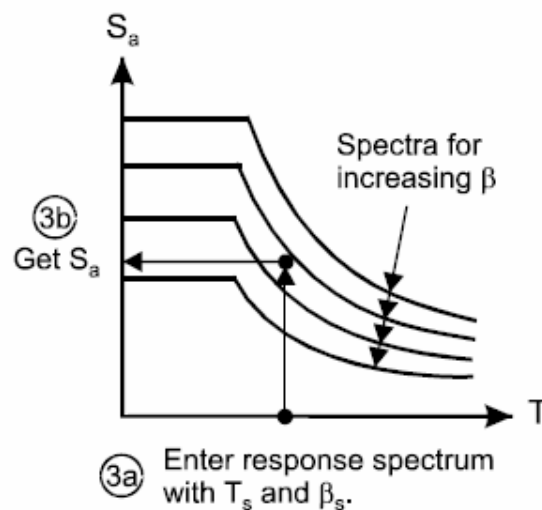
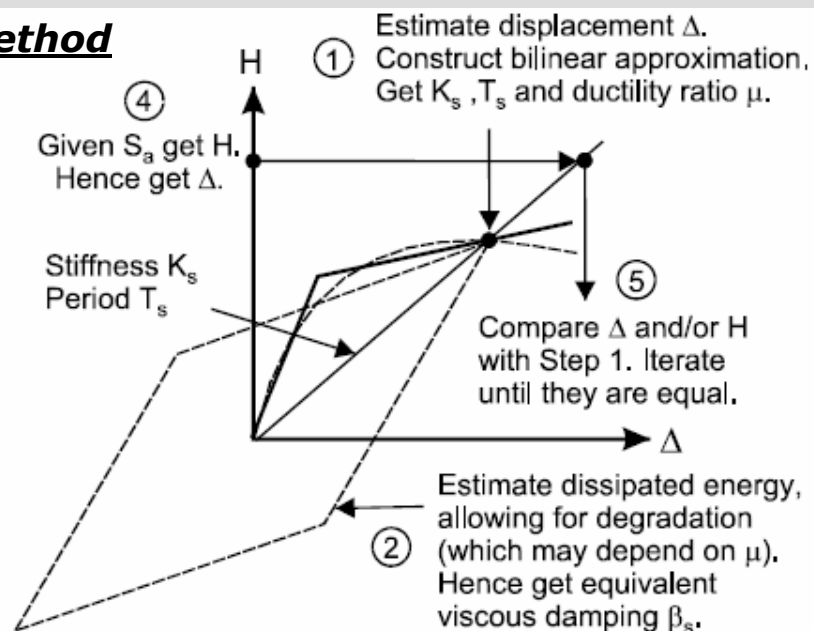
② Given K_e , K_h , T_e and μ , get effective stiffness K_{eff} , period T_{eff} and damping ratio β_{eff} from formulas in FEMA 440.



③a Enter response spectrum
with T_{eff} and β_{eff} .

Target displacement

ATC 40 Capacity Spectrum Method

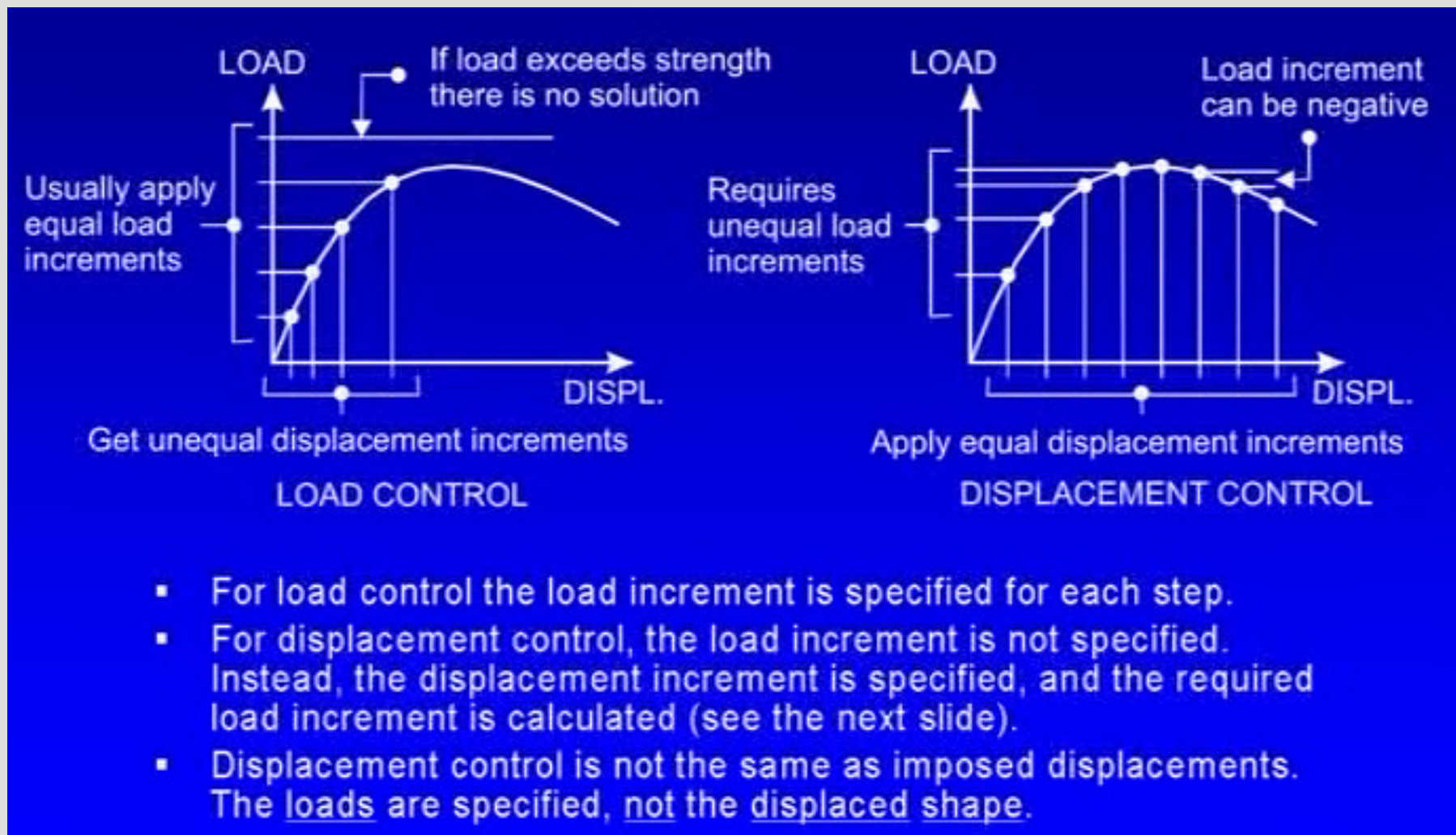




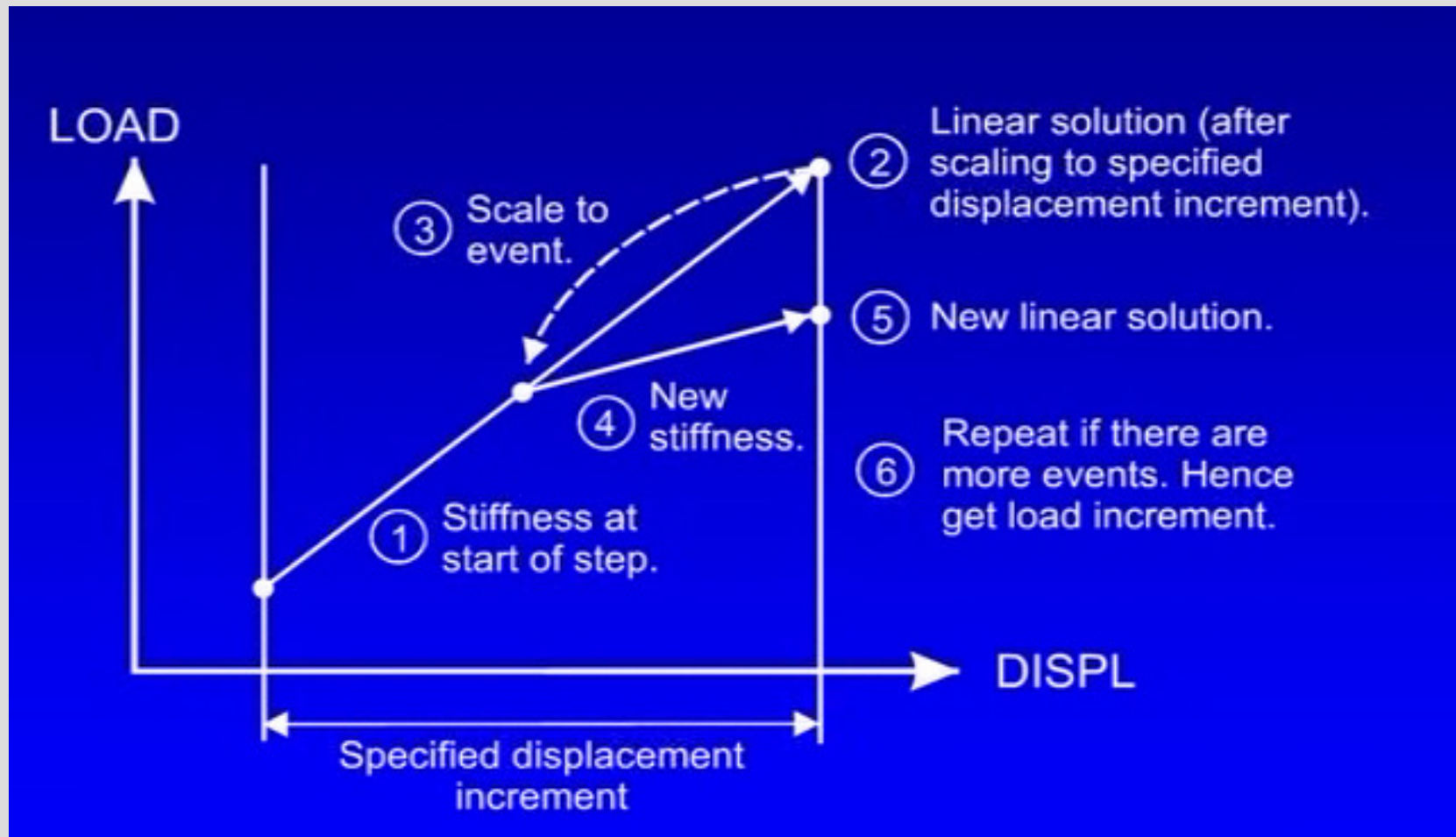
Metodi numerici

- Analisi statica non lineare Push over:
 - Controllo di spostamento
 - Strategia ad eventi
- Analisi al passo:
 - Equilibrio dinamico
 - Controllo di forza e strategia ad eventi
- Smorzamento elastico:
 - Metodo di Rayleigh
 - Metodo modale

Controllo di forza o di spostamento?

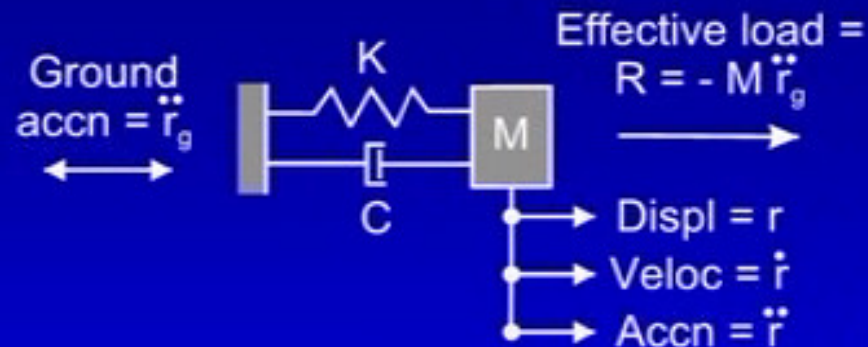


Push over: controllo di spostamento con strategia ad eventi



Integrazione al passo

Equilibrio dinamico



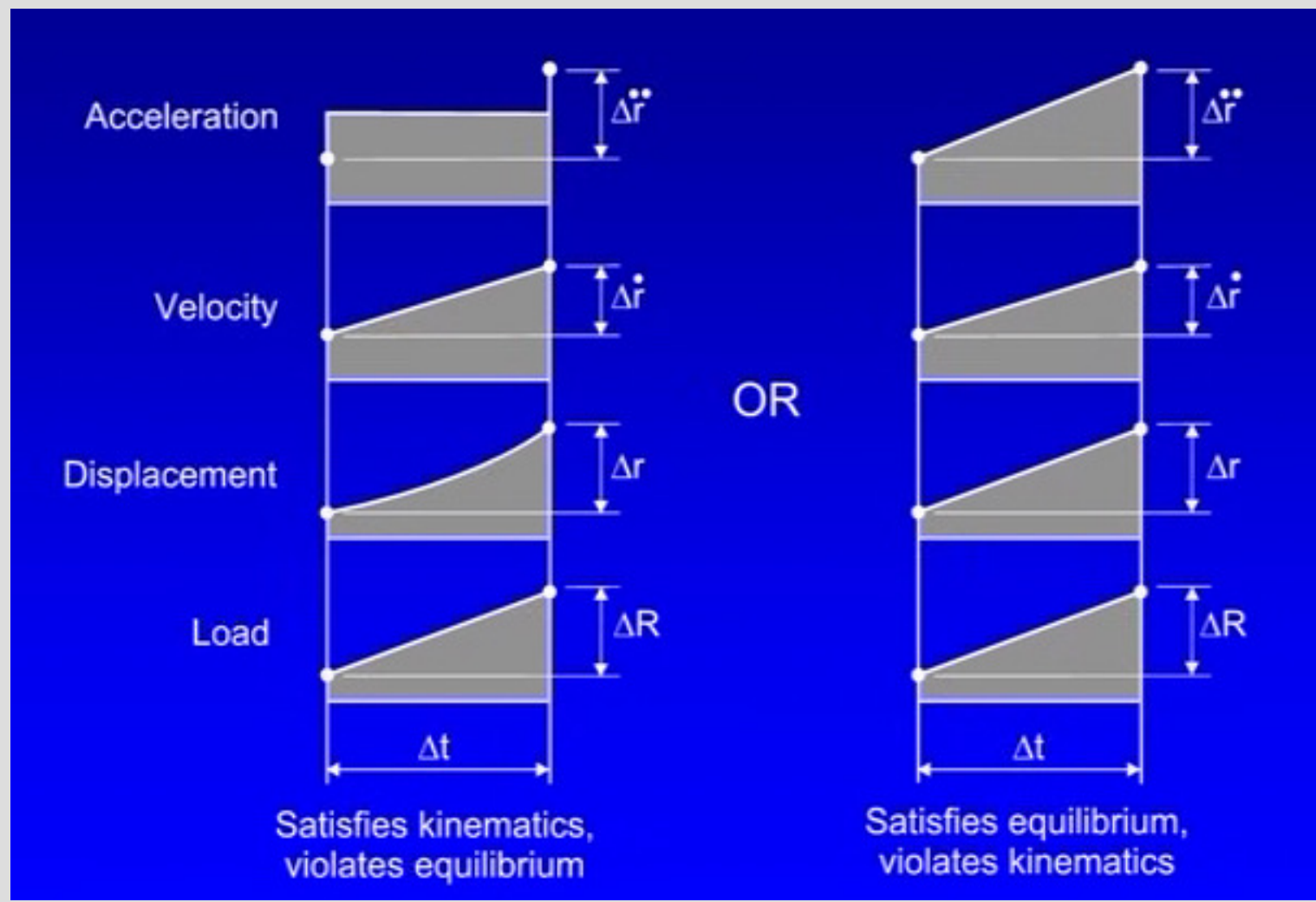
- At any point in time, dynamic equilibrium is :

$$M\ddot{r} + C\dot{r} + Kr = R$$
- Over a time step, Δt , dynamic equilibrium is :

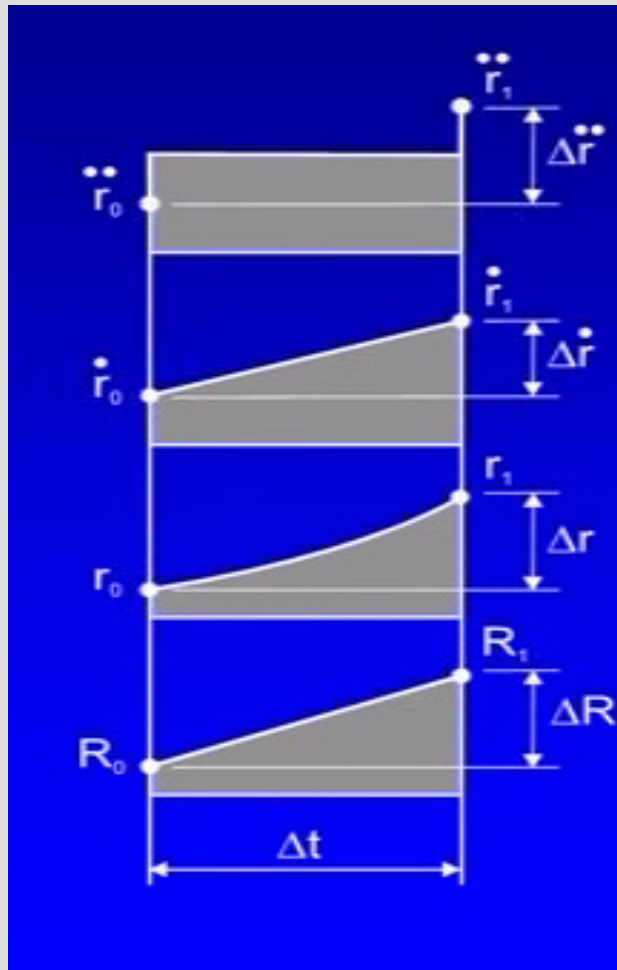
$$M\Delta\ddot{r} + C\Delta\dot{r} + K\Delta r = \Delta R$$
- This equation can be solved by step-by-step methods.
- There is one equation with three unknowns ($\Delta\ddot{r}$, $\Delta\dot{r}$ and Δr), so assumptions must be made and the solution is approximate.
- There are many step-by-step methods. PERFORM uses the Constant Average Acceleration (CAA) method.

- 1 equazione e 3 incognite: è necessario fare qualche semplificazione per eliminare due incognite

Assunti del metodo CAA



Equazioni del metodo CAA



Equilibrium :

$$M \Delta \ddot{r} + C \Delta \dot{r} + K \Delta r = \Delta R$$

From kinematics :

$$\Delta \dot{r} = \frac{\Delta t}{2} (\ddot{r}_0 + \ddot{r}_1) = \frac{\Delta t}{2} (2 \ddot{r}_0 + \Delta \ddot{r})$$

$$\Delta r = \frac{\Delta t}{2} (\dot{r}_0 + \dot{r}_1) = \frac{\Delta t}{2} (2 \dot{r}_0 + \Delta \dot{r})$$

Hence get effective stiffness and load :

$$K_{\text{eff}} = \frac{4}{\Delta t^2} M + \frac{2}{\Delta t} C + K$$

$$\Delta R_{\text{eff}} = -M \ddot{u}_g + M(2\ddot{r}_0 + \frac{4}{\Delta t} \dot{r}_0) + 2C\dot{r}_0$$

Solve $K_{\text{eff}} \Delta r = \Delta R_{\text{eff}}$. Then :

$$\Delta \dot{r} = -2\dot{r}_0 + \frac{2}{\Delta t} \Delta r$$

$$\Delta \ddot{r} = -2\ddot{r}_0 + \frac{2}{\Delta t} \Delta \dot{r}$$

Procedura a passo di Perform

- PERFORM-3D uses the CAA method.
- The time step, Δt , is the same for all steps.
- A variable time step does not seem to be needed, and is not implemented in PERFORM.
- In each time step the load increment is known, and the analysis uses load control. Displacement control is not suitable for dynamic step-by-step analysis.
- Within each step the event-to-event strategy is used (with overshoot).

Scelta del passo

- The time step must be short enough to do two things :
 - (1) Capture the response of the structure.
 - (2) Capture the earthquake ground motion.
- Structure response : the time step (Δt) should be no larger than about 1/10 of the shortest significant period (the period of the highest mode that contributes significantly to the response).
- If the first mode period is T_1 , the period of the highest significant mode might be about $0.1T_1$. Hence Δt should be no larger than about $0.01T_1$. For example, if $T_1 = 2$ secs, Δt should be no larger than 0.02 secs.
- If the ground motion is discretized at, say 0.02 second intervals, do not use a time step larger than 0.02 seconds.
- It is wise to use a time step that is an exact subdivision of the discretization interval, to avoid missing ground motion peaks (e.g., in the above case, use 0.02, 0.01, 0.005, etc.).

Smorzamento elastico

- An elastic structure dissipates energy by a variety of mechanisms. This is almost always modeled as viscous damping.
- When a structure yields it dissipates energy more directly, through inelastic action. The dissipated energy for a component is the area under its hysteresis loops.
- However, this does not account for all energy dissipation – there is still a lot of “elastic” energy dissipation.
- Again, this is almost always modeled as viscous damping.
- For nonlinear analysis there are no mode shapes, so the usual “5% modal damping” can not be used. (It could be, but the mode shapes would have to be re-calculated at every nonlinear event, which is impractical.)
- PERFORM has two models for elastic energy dissipation, namely Rayleigh damping and “Modal” damping.

Matrice di smorzamento

At any point in time, the dynamic analysis satisfies the following equilibrium equation :

$$\mathbf{R}_{\text{external}} = \mathbf{R}_{\text{internal}} = \mathbf{R}_K + \mathbf{R}_M + \mathbf{R}_C$$

For linear analysis : $\mathbf{R}_K = (\text{stiffness}) \times (\text{displacement}) = \mathbf{K} \mathbf{r}$

For nonlinear analysis : $\mathbf{R}_K = \sum_{\text{all steps}} \mathbf{K}_{\text{tangent}} \Delta \mathbf{r}$

For both linear and nonlinear analysis :

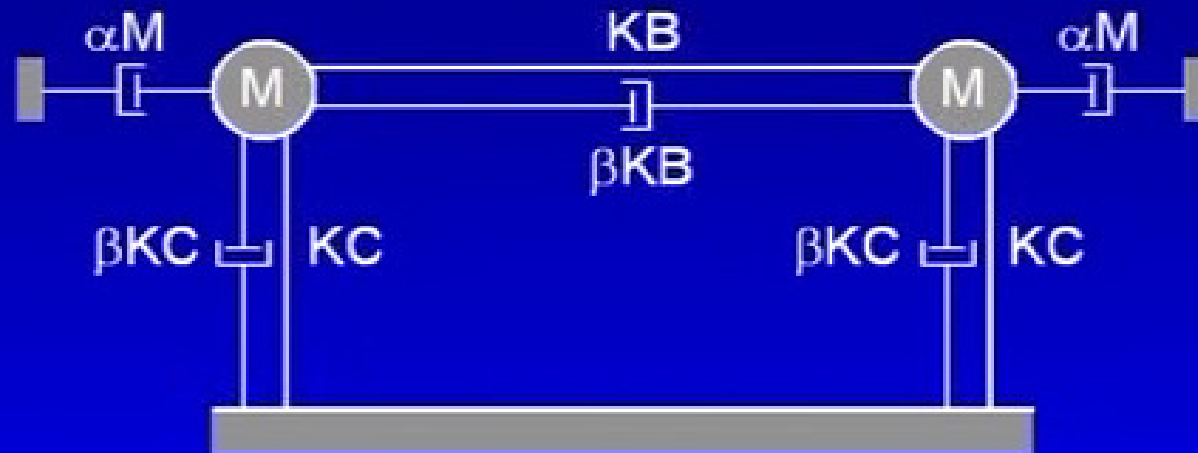
$$\mathbf{R}_M = (\text{mass}) \times (\text{acceleration}) = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}$$

$$\text{and usually } \mathbf{R}_C = (\text{damping}) \times (\text{velocity}) = \mathbf{C} \dot{\mathbf{r}}$$

The mass and stiffness matrices, \mathbf{M} and \mathbf{K} , are well defined.

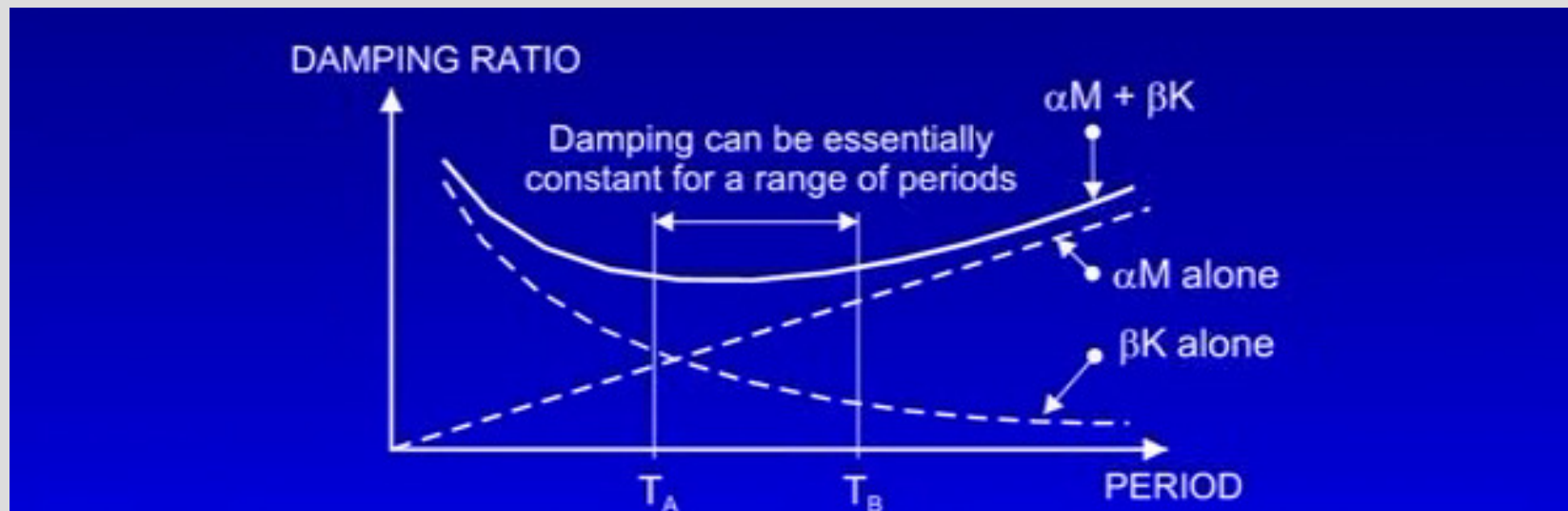
For the damping forces we need a damping matrix, \mathbf{C} .

Smorzamento di Rayleigh



- The αM dampers connect the masses to the ground. They exert external damping forces.
- The βK dampers act in parallel with the elements. They exert internal damping forces.
- The damping matrix is $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$.
- The physical meaning of the model is clear.
- How to choose the α and β parameters is not so clear.

Smorzamento lineare alla Rayleigh (cont.)



- For linear analysis, the coefficients α and β can be chosen to give essentially constant damping over a range of mode periods, as shown.
- A possible method is as follows :
 - Choose $T_B = 0.9$ times the first mode period.
 - Choose $T_A = 0.2$ times the first mode period.
 - Calculate α and β to give 5% damping at these two values.
- The damping ratio is essentially constant in the first few modes.
- The damping ratio is higher for the higher modes.

Smorzamento modale: analisi lineare

- In a linear analysis the modes are uncoupled. The structure vibrates independently in each mode, and each mode is damped independently.
- Modal damping corresponds to a specific damping matrix, as shown below.
- Modal damping gives both external and internal damping forces. These are not the same as the forces from Rayleigh damping.

$$\text{For } n^{\text{th}} \text{ mode : } \mathbf{C}_n = \xi_n \frac{4\pi}{T_n} (\mathbf{M} \phi_n) (\mathbf{M} \phi_n)^T$$

$$\text{For structure : } \mathbf{C} = \sum \mathbf{C}_n$$

Where : ξ = damping ratio, T = period,

\mathbf{M} = mass matrix, ϕ = mode shape.

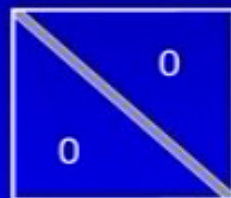
Smorzamento modale in Perform

- PERFORM uses the same damping matrix as for linear analysis, based on the mode shapes and periods for the initial elastic structure.
- The damping matrix stays constant.
- As the structure yields, instantaneous mode shapes and periods exist. The mode shapes and damping matrix could be recalculated.
- However, this would be very expensive computationally.
- Also, changing the damping matrix as the structure yields is not necessarily a good idea. For example, there is a sudden equilibrium unbalance when the damping matrix changes.

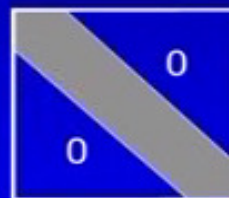
Smorzamento modale in Perform

Modal Damping Effect on Stiffness Matrix

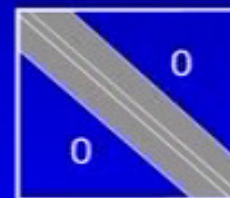
- The mass matrix, M , is diagonal.
- The stiffness matrix, K , is banded.
- For Rayleigh damping, $C = \alpha M + \beta K$, so C is banded.
- For modal damping, C is generally a full matrix (not banded).



M



K



Rayleigh C



Modal C

- Modal damping terms that are outside the stiffness matrix band are "right hand sided" in the analysis. This causes equilibrium errors in each time step that are corrected in the next step.
- This does not seem to cause any problems for frame structures. However, be careful with shear walls – compare with Rayleigh damping.

Smorzamento modale e alla Rayleigh combinati

- Suppose a structure has N total degrees of freedom (say $N = 10000$) and the damping matrix is based on M modes (say $M = 20$).
- There are many undamped degrees of freedom ($10000 - 20 = 9980$). This is not good.
- Always add a small amount of Rayleigh βK damping, to damp out high frequency vibrations.
- For example, specify 5% modal damping plus enough βK damping to give 0.02% damping at the first mode period.