Pordenone,
15-16 Giugno 2012

associazione ingegneri e architetti
della provincia di pordenone
piazzetta Ado Furlan 2|8
33170 pordenone
t. 0434 550250 | f. 0434 551229
associazione@ordineingegneri.pn.it

In collaborazione con:

CSi
Italia s.r.l
Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
Fax 0434 28466
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

Tecniche per una corretta modellazione strutturale agli elementi finiti

Relatori:
Ing. Massimo Brunetta (CSi Italia)
Ing. Leonardo Bandini (CSi Italia)
Ing. Andrea Bidoli (CSi Italia)

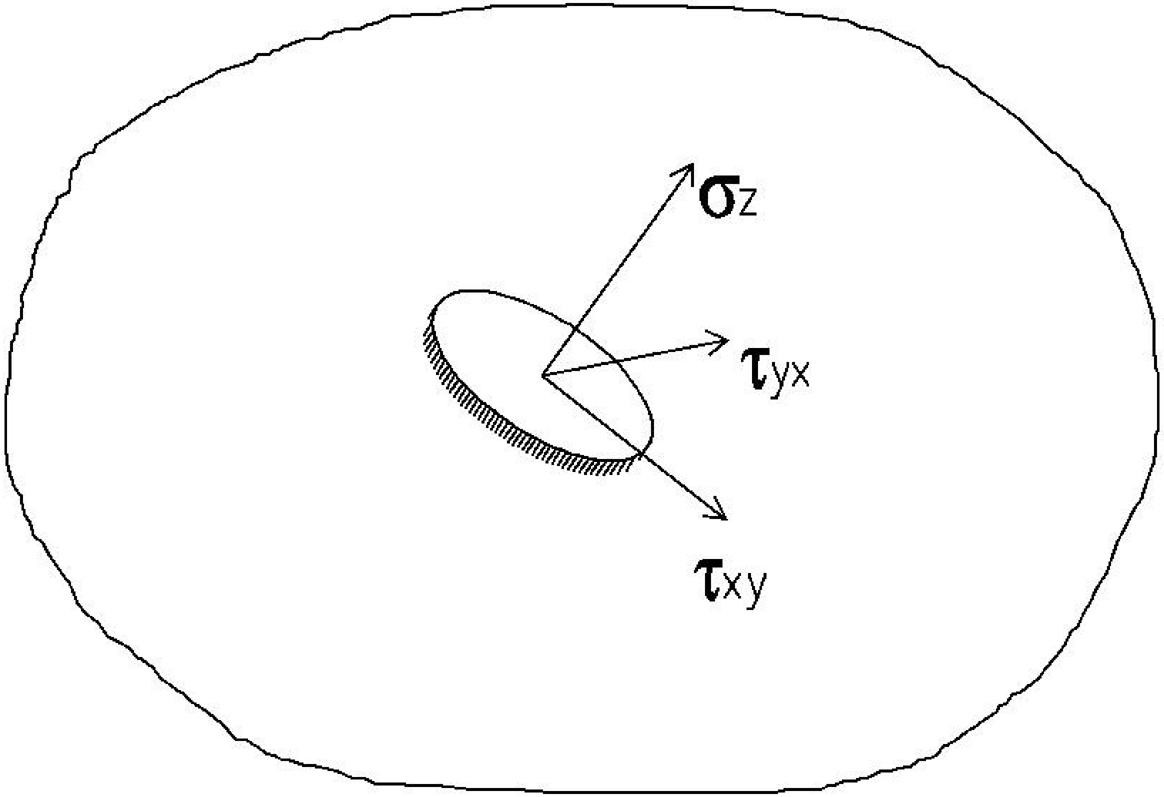
Questa presentazione può essere scaricata dal seguente indirizzo:

www.csi-italia.eu/download/corsopn.pdf

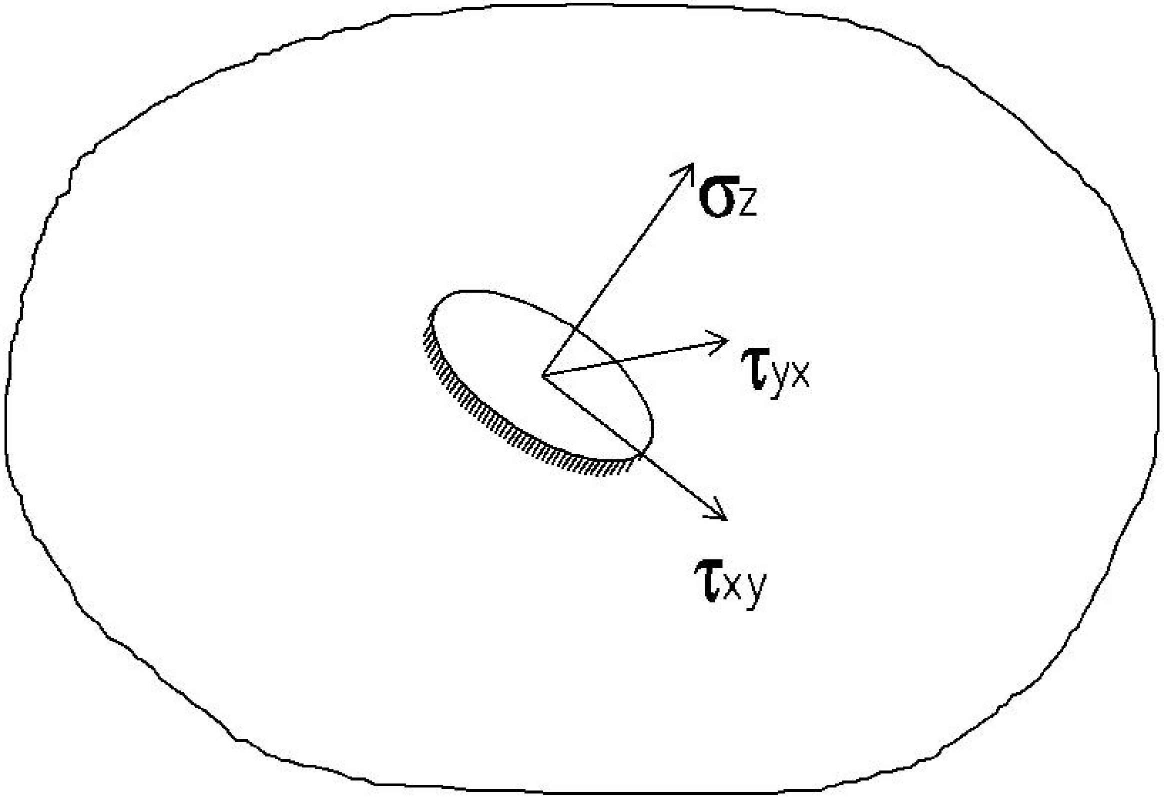
Per eventuali domande indirizzo mail: leonardo@csi-italia.eu

Indirizzo web: http://www.csi-italia.eu

INTRODUZIONE



INTRODUZIONE



CONTINUO

INTRODUZIONE

- Un modello del continuo ha un numero infinito di elementi infinitesimi connessi direttamente l'uno all'altro, senza nodi

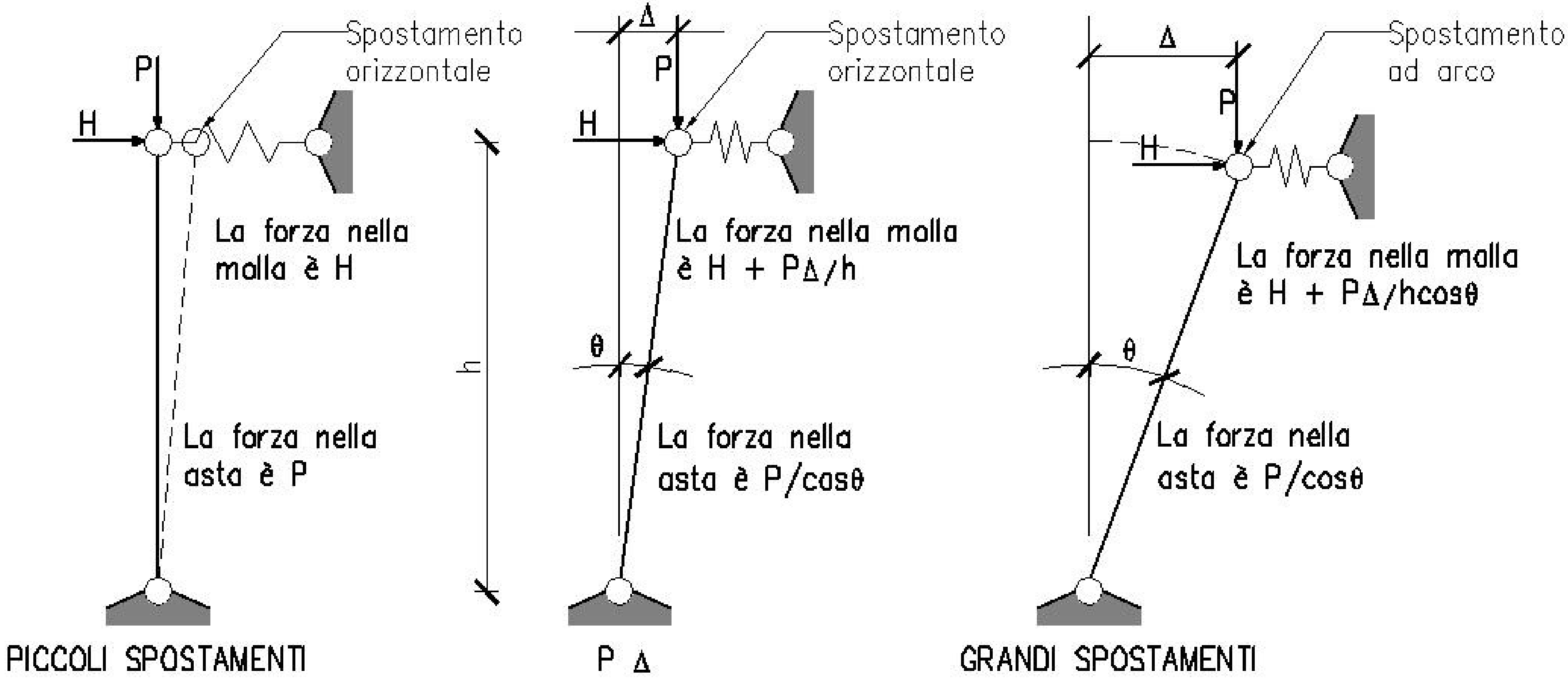
- Un modello discretizzato ha un numero finito di elementi connessi l'uno all'altro per mezzo di un numero finito di nodi

Si parla pertanto di modellazione "agli elementi finiti", o anche di modellazione "a nodi ed elementi"

NON LINEARITA' GEOMETRICA

C'è da rispettare:

- Equilibrio
- Congruenza degli spostamenti (compatibilità geometrica)

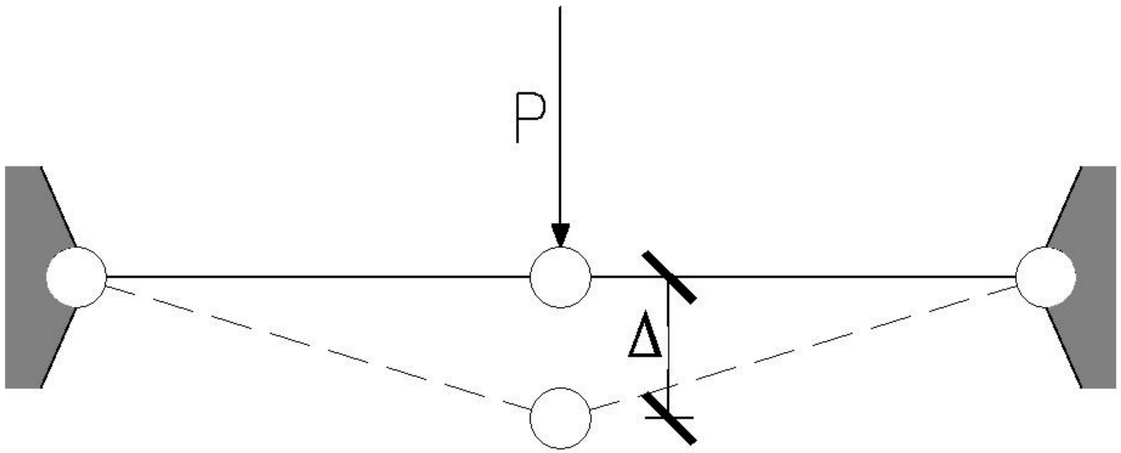


Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

NON LINEARITA' GEOMETRICA

In generale:

- edifici con pilastri poco caricati → piccoli spostamenti
- edifici con pilastri molto caricati → P Δ
- strutture con effetto catenaria → grandi spostamenti



CSi Italia s.r.l
Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

NON LINEARITA' GEOMETRICA

L'analisi del secondo ordine è una analisi di tipo non lineare. Si svolge per iterazioni successive.

Non vale il principio di sovrapposizione degli effetti.

Non è possibile eseguire l'analisi solo per i carichi elementari e poi (come si fa normalmente) ottenere i risultati delle combinazioni per sovrapposizione. Quando si hanno molte combinazioni di carico, ciascuna deve essere risolta con una analisi apposita.

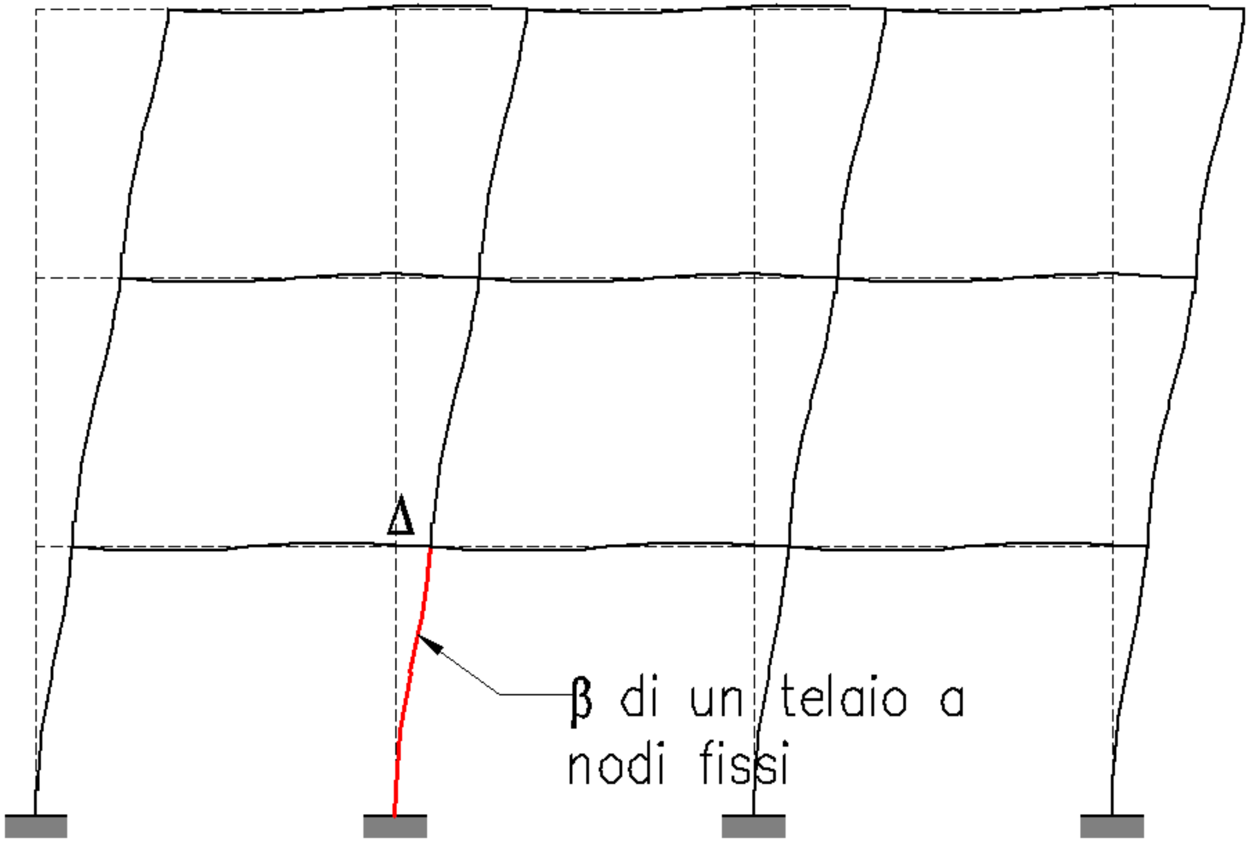
Per questo motivo l'analisi del secondo ordine (con il metodo PΔ o quello dei grandi spostamenti) viene utilizzata solo quando è necessario.

Problemi di instabilità nelle verifiche

Gli algoritmi utilizzati nelle verifiche per calcolare la lunghezza libera di inflessione dei pilastri si riferiscono a telai a nodi fissi. Se i telai sono a nodi spostabili (e i carichi elevati), perché i risultati delle verifiche siano corretti è anche necessario che l'analisi sia di tipo P Δ.

NON LINEARITA' GEOMETRICA

Verifica di telai



CSi Italia s.r.l
Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

NON LINEARITA’ GEOMETRICA

Verifica di pilastri a mensola

Il programma assume che i pilastri siano parte di una struttura a nodi fissi, quindi adotta un β pari a uno …

L’analisi P Δ potrebbe risolvere la cosa. Però attenzione :

•C’è sempre bisogno di una forza orizzontale perché l’effetto P Δ si inneschi. Questo non sempre si verifica (specialmente per combinazioni di carico non sismiche).

•Utilizzare il metodo PΔ può essere oneroso perché è’ necessario che per tutte le combinazioni di carico sia utilizzata una analisi non lineare.

•A volte può essere più semplice e veloce semplicemente intervenire sovrascrivendo a mano i β delle mensole.

METODO DELLE RIGIDEZZE

Il metodo delle rigidezze (Direct Stiffness Method) utilizza le relazioni forza-spostamento con le forze espresse in funzione degli spostamenti per mezzo della rigidezza. I passi fondamentali sono i seguenti:

1. Iniziare con la **congruenza degli spostamenti.** Utilizzando la congruenza, stabilire la relazione tra spostamenti di estremità di ciascun elemento e spostamenti dei nodi della struttura (incognite)
2. Utilizzando la relazioni forza-spostamento (in forma di rigidezza), esprimere le forze di estremità degli elementi in funzione degli spostamenti nodali incogniti
3. Imponendo l'**equilibrio nodale**, scrivere le "equazioni di equilibrio" tra le forze nodali esterne, note, e le forze di estremità degli elementi (e di conseguenza gli spostamenti nodali incogniti)
4. Risolvere il sistema simultaneo delle equazioni di equilibrio per ottenere il valore numerico degli spostamenti nodali

$$\underline{K}\ \underline{u} = \underline{F}$$

Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

METODO DELLE RIGIDEZZE

5. Usare nuovamente la congruenza per imporre questi spostamenti alle estremità dei singoli elementi
6. Noti gli spostamenti di estremità dei singoli elementi utilizzare nuovamente le relazioni forza spostamento per calcolare le loro forze di estremità.
7. Note le forze di estremità degli elementi, verificare che sui singoli nodi vi sia effettivamente equilibrio tra forze esterne e forze interne. Quest'ultimo passo non è essenziale, ma è un utile controllo per verificare l'accuratezza dei calcoli. Se ci sono dei significativi sbilanci nell'equilibrio vuol dire che qualche cosa è andato storto.

AFFIDABILITA’ DEL MODELLO

Ci sono due controlli fondamentali da fare sul modello:

- Controllare le tensioni lungo l’interfaccia tra un elemento e l’altro per verificare l’affidabilità locale
- Controllare gli errori di equilibrio per verificare l’accuratezza generale

TENSIONI LUNGO L’INTERFACCIA

Il programma calcola le tensioni ai punti di estremità di ciascun elemento piano o solito. Quando le estremità di più elementi convergono sullo stesso nodo, in teoria le tensioni di queste estremità dovrebbero essere uguali tra loro. In pratica non è così.

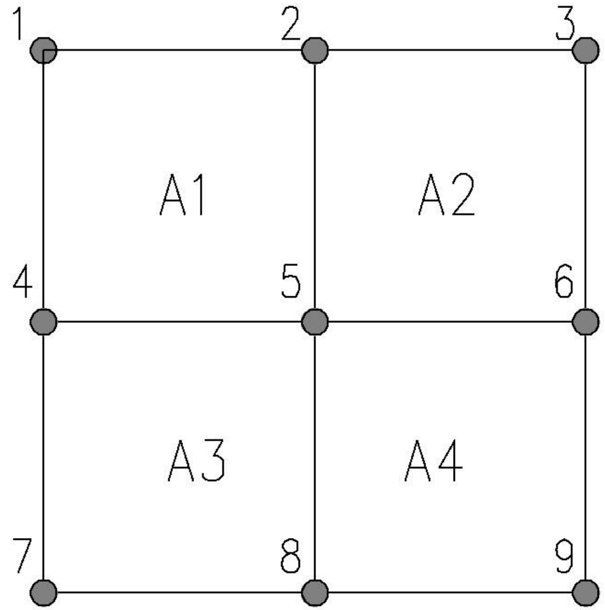
Le tensioni dei vari elementi convergenti su uno stesso nodo risultano sempre un po’ diverse l’una dall’altra. Si tratta di un limite intrinseco al metodo delle rigidezze.

Non è possibile assicurare allo stesso tempo equilibrio nodale, congruenza degli spostamenti e omogeneità delle tensione sull’interfaccia degli elementi adiacenti.

TENSIONI LUNGO L'INTERFACCIA

Per ciascuno degli elementi A1, A2, A3 e A4 viene calcolata una tensione di estremità in corrispondenza dei quattro vertici.

Lungo l'interfaccia (nodi 4, 5 e 6) le tensioni così calcolate sono generalmente diverse tra loro.



Nelle rappresentazioni proposte dall'interfaccia grafica , generalmente è attiva una opzione denominata "stress averaging" . Questa opzione produce automaticamente un grafico delle isotensionali con tensioni già mediate.

Per percepire la reale entità delle discontinuità di tensione è necessario disattivare preventivamente l'opzione "stress averaging". Meglio ancora riferirsi direttamente all'output numerico.

CSi Italia s.r.l
Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

CONTROLLO DELL'EQUILIBRIO

Una volta eseguita l'analisi, è importante controllare che vi sia equilibrio tra forze interne (ed eventuali forze di inerzia e viscose) e forze esterne agenti su ciascun nodo.

Molti programmi eseguono questo controllo in modo automatico. Viene prodotto un tabulato dove è riportato l' errore di equilibrio per ciascun DOF. Un po' di errore c'è sempre a causa degli arrotondamenti nel calcolo (sbilanciamenti residui).

Se l'errore è modesto in relazione all'entità dei carichi applicati sul nodo, la soluzione delle equazioni può considerarsi accurata. Se vi è un forte sbilanciamento no. In questo caso molti programmi emettono un "warning".

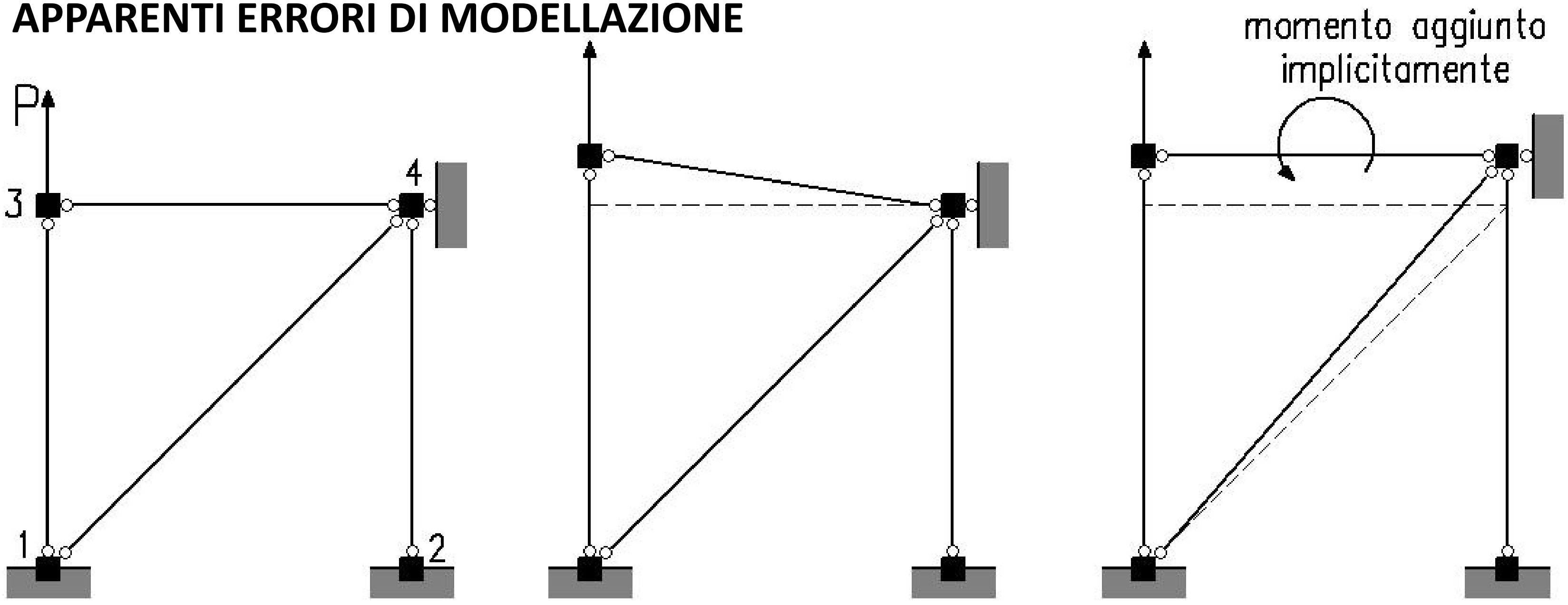
Gli sbilanciamenti nell'equilibrio e i conseguenti problemi numerici sono generalmente causati da cattiva modellazione.

Due cause fondamentali:

- Instabilità della struttura
- Cattivo condizionamento delle equazioni dell'equilibrio

Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

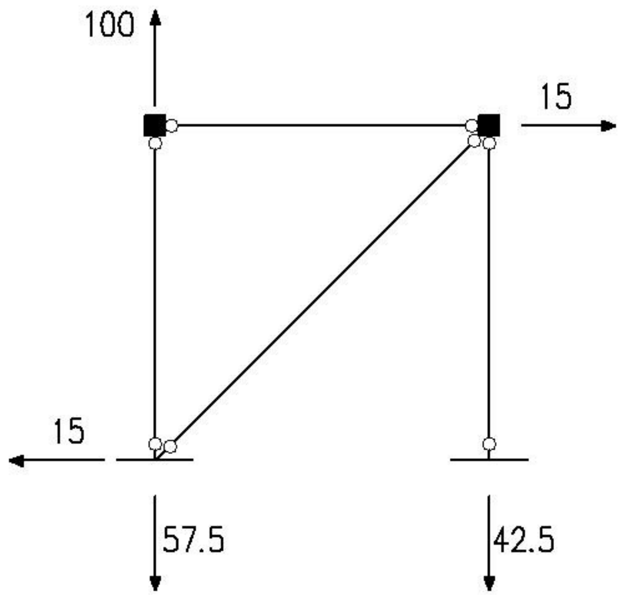
APPARENTI ERRORI DI MODELLAZIONE



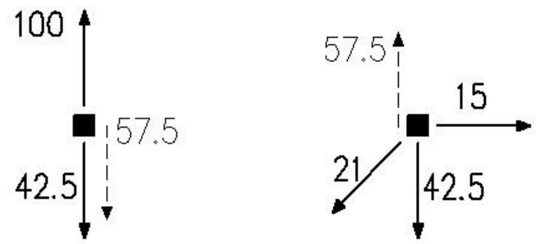
(a) reticolare   b) deformata   (c) deformata con vincolo interno

Se imponiamo un vincolo interno in modo che i nodi 3 e 4 abbiano lo stesso spostamento verticale, la deformata passa da (b) a (c). Dal momento che un numero maggiore di elementi deve deformarsi è necessario che ci sia un carico aggiuntivo per soddisfare l'equilibrio. Un vincolo interno non dovrebbe produrre carichi esterni, ma solo forze interne bilanciate tra loro. Si tratta di un grave errore di progettazione. Lo stesso tipo di errore si ottiene modellando un diaframma non piano.

APPARENTI ERRORI DI MODELLAZIONE



(d) manca apparentemente l'equilibrio



(e) forze aggiunte implicitamente dal vincolo

In realtà l'errore è solo apparente: il vincolo interno ha aggiunto automaticamente una coppia di forze che ricostituiscono sia l'equilibrio a livello nodale che a livello di intera struttura. Si tratta di un pericolo da tenere presente ogniqualvolta si utilizzano vincoli interni (constraints). Questi vincoli hanno la capacità di generare forze implicite, anche molto importanti, di cui spesso l'utente non è cosciente.
In conclusione, usare estrema prudenza nell'applicare vincoli interni.

STRUTTURA INSTABILE

Una struttura è instabile se si può spostare come un corpo rigido o se può deformarsi come un meccanismo.

Dal punto di vista numerico se la struttura è instabile la sua matrice di rigidezza non ha inversa (la matrice di flessibilità è infinita).

Se un qualunque coefficiente di rigidezza diagonale è zero quel grado di libertà non richiede alcuna forza per spostarsi e la struttura è un meccanismo.

Se un coefficiente di rigidezza diagonale è negativo la struttura deve essere supportata per impedirle di collassare.

Se i coefficienti di rigidezza diagonali sono tutti maggiori di zero, la struttura può ancora essere instabile, ma questa instabilità verrà rilevata solo durante la fase di soluzione delle equazioni

Quando la struttura si deforma come un corpo rigido la causa è abbastanza ovvia: non ci sono sufficienti vincoli esterni. Una struttura 3D deve avere supporti sufficienti a vincolare traslazioni e rotazioni sui tre assi.

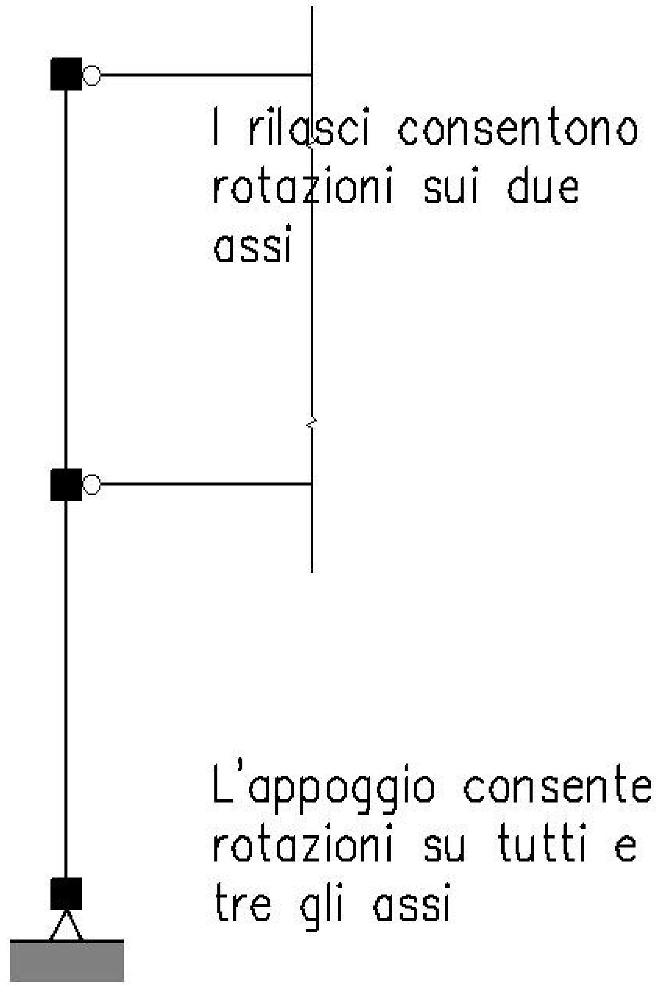
STRUTTURA INSTABILE

La causa dei meccanismi non è sempre così ovvia. Ecco alcuni esempi:

1) Se in una struttura reticolare i nodi non sono vincolati nei confronti delle rotazioni si creano tante labilità rotazionali quante sono i nodi. I nodi dovrebbero quindi venire vincolati dall'utente. In realtà un grado di libertà privo di vincoli come questo è facilmente riconoscibile perché produce un elemento nullo sulla diagonale della matrice di rigidezza. Molti programmi sono in grado di correggere questo errore in modo automatico.
2) Se una struttura reticolare 3D ha alcuni parti piane, i nodi di tali parti non hanno vincolo alla traslazione normale al piano. Sulla diagonale della matrice di rigidezza si produce un elemento nullo solo se il piano è parallelo a uno di quelli principali. Pertanto non sempre l'errore può essere corretto in modo automatico.
3) Le figure seguenti indicano instabilità che i programmi non sono in grado di correggere automaticamente.

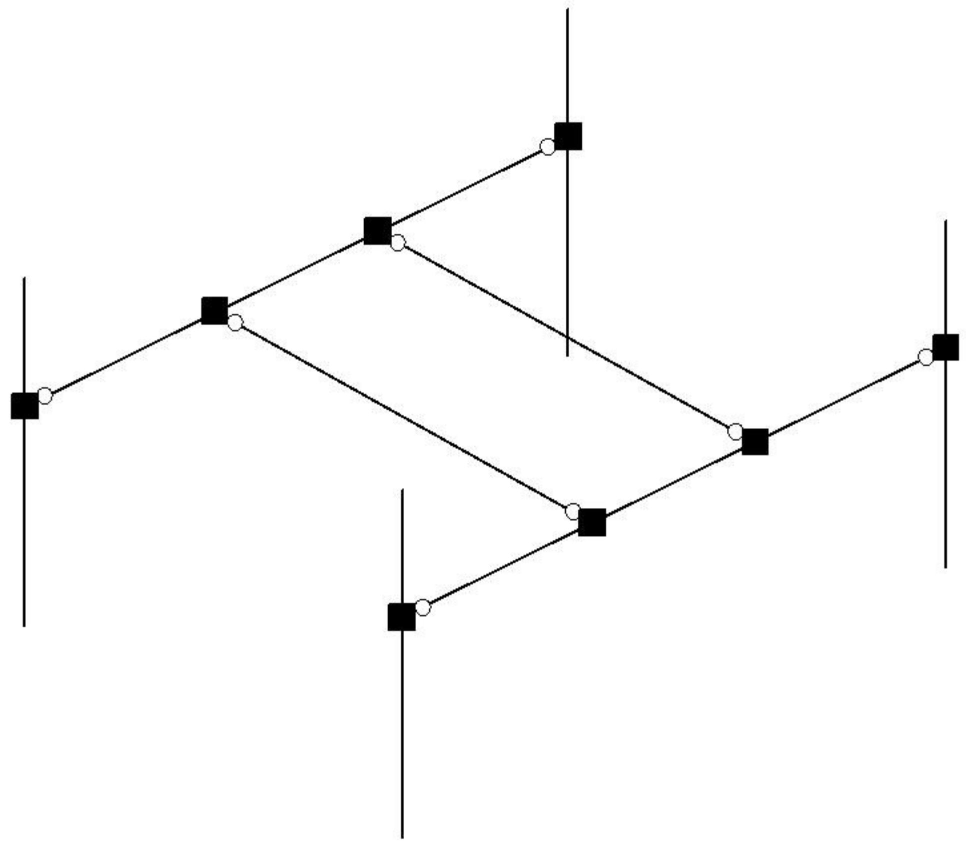
STRUTTURA INSTABILE

Nel caso della figura (a) per modellare la cerniera alla base del pilastro è stato applicato un vincolo ai soli gradi di libertà traslazionale del nodo alla base. Il risultato è che tutti i nodi della pilastrata sono liberi di ruotare attorno all’asse z.



(a) pilastro incernierato alla base

STRUTTURA INSTABILE



(b)troppi rilasci sulle travi

Nel caso della figura (b) i momenti torcenti non dovrebbero essere rilasciati su entrambe le estremità delle travi. Per le travi secondarie, molti programmi possono rilevare e correggere questo errore automaticamente Non altrettanto per le travi principali.

CSi Italia s.r.l
Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

STRUTTURA INSTABILE

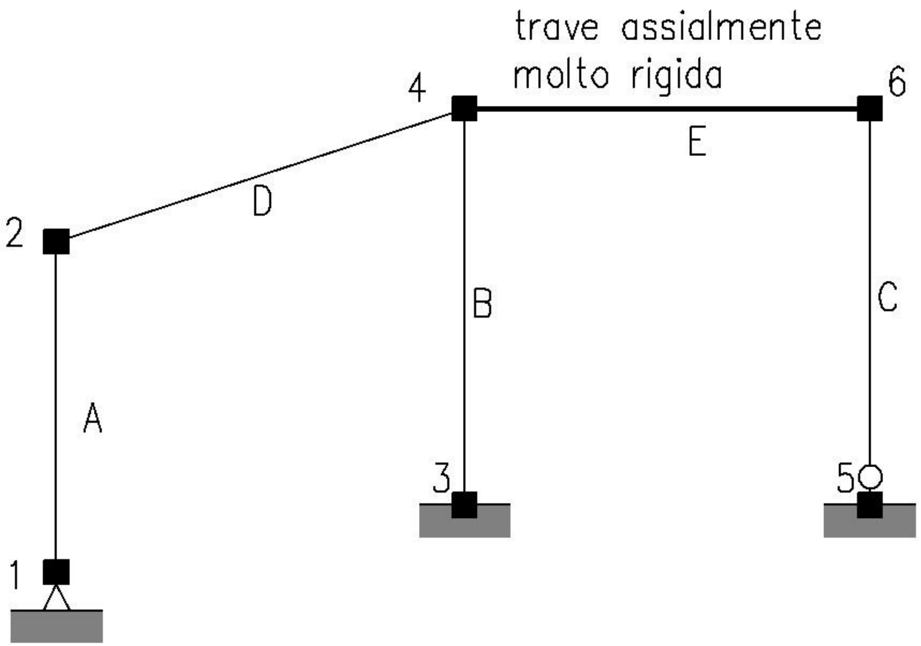
Per riassumere:

- Se alcune parti di una struttura 3D sono in realtà 2D, assicurarsi che non vi sia instabilità fuori dal piano
- Se la base di un pilastro è incernierata, consentire le rotazioni flessionali, ma vincolate quelle torsionali.
- Prudenza nello specificare rilasci a momento alle estremità di travi e pilastri. Evitate di specificarne troppi.

EQUAZIONI MAL CONDIZIONATE

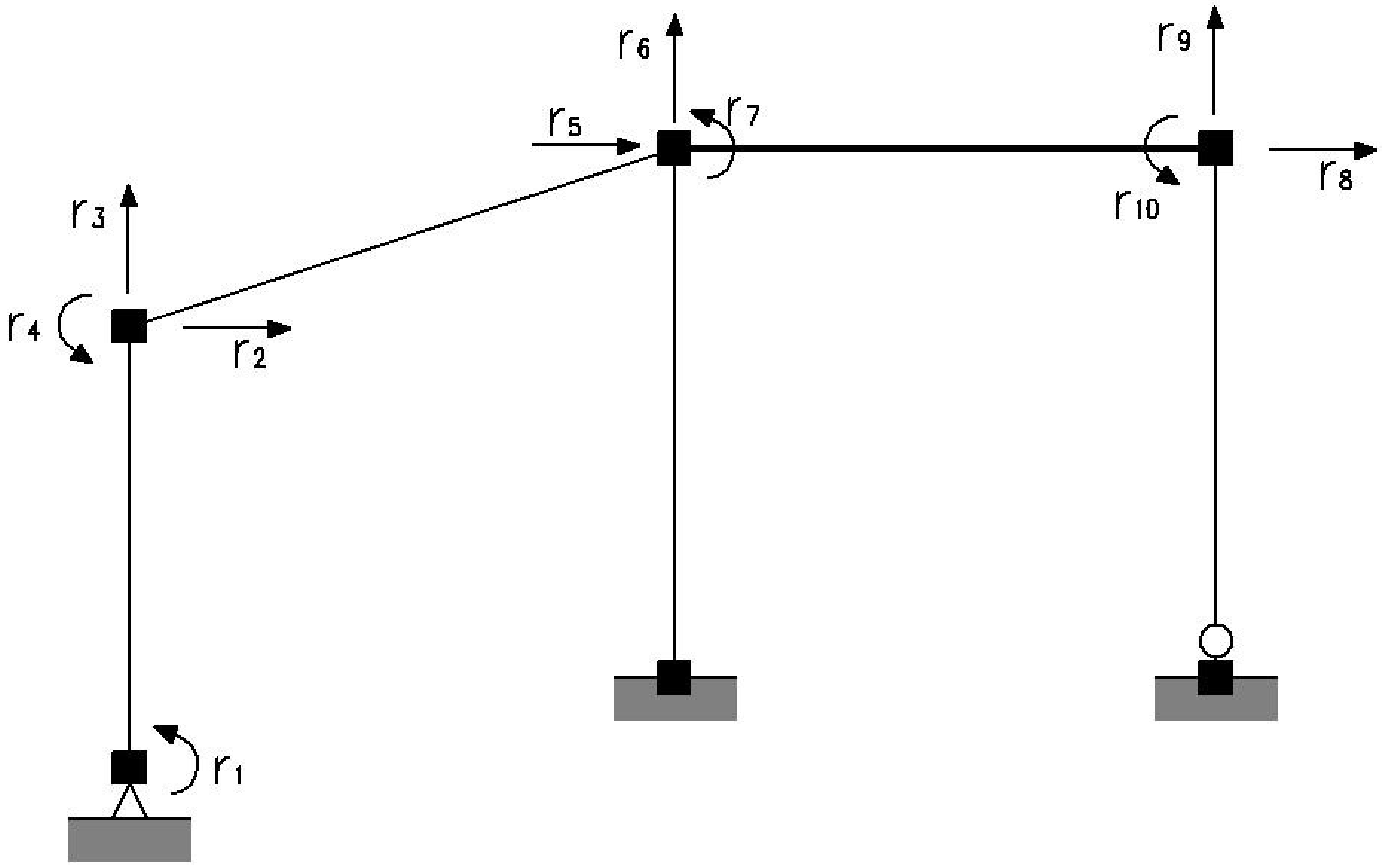
La matrice di rigidezza è usualmente assemblata utilizzando valori numerici in doppia precisione. Quindi con circa 15 decimali significativi. Normalmente questa cautela è sufficiente a rendere le computazioni numeriche molto robuste. Tuttavia se la modellazione è mal fatta possono crearsi problemi numerici.

Un esempio:



(a) nodi ed elementi

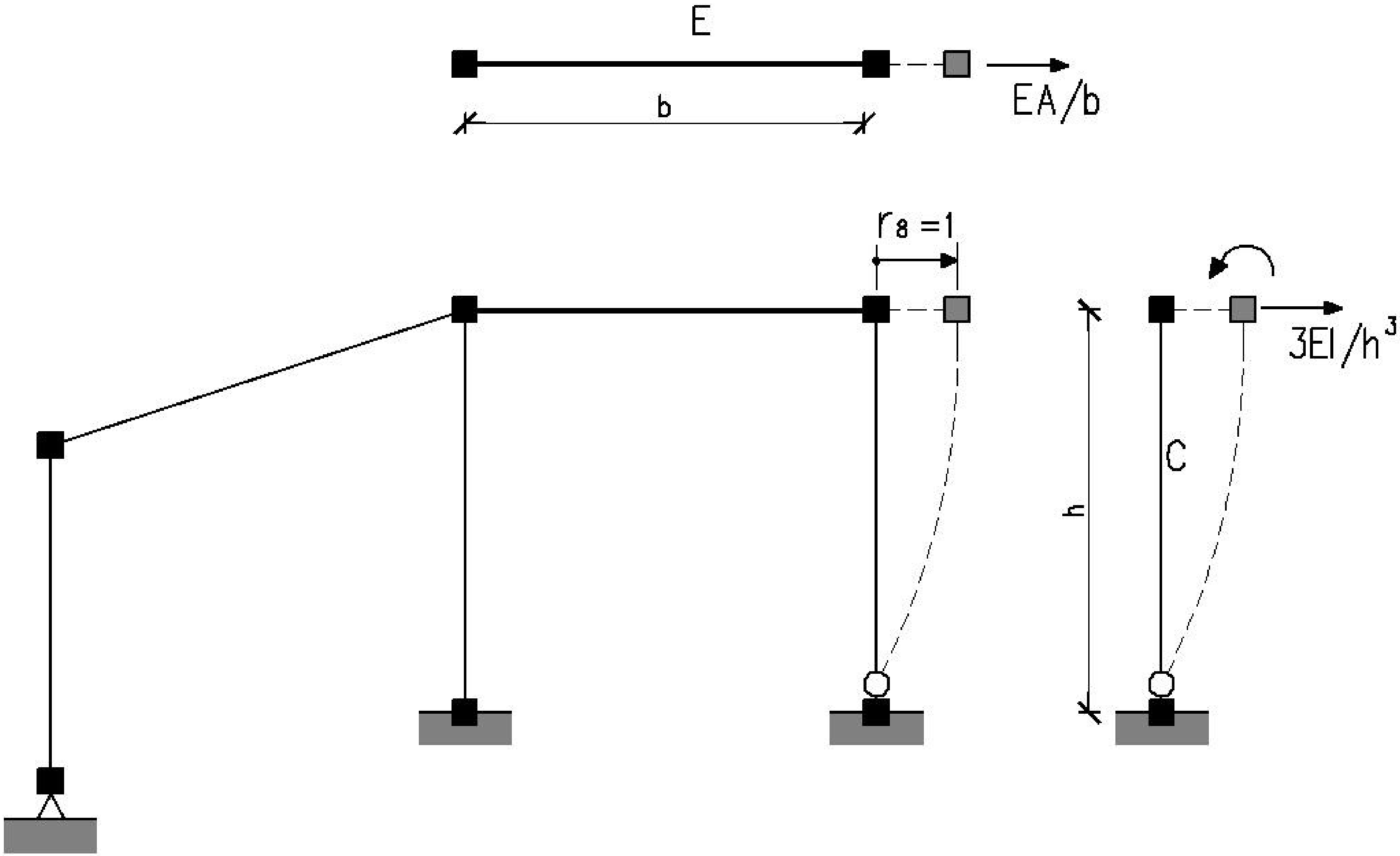
EQUAZIONI MAL CONDIZIONATE



(b)gradi di libertà

Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

EQUAZIONI MAL CONDIZIONATE



(c) deformata per la colonna 8 della matrice di rigidezza

Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

EQUAZIONI MAL CONDIZIONATE

Supponiamo che per rendere la trave molto rigida sia stato usato un valore di EA grandissimo: tanto che EA/b = 10^{20} . Supponiamo che invece 3EI/h = 100.

Con questi valori il coefficiente di rigidezza della trave e 10^{18} volte più largo di quello del pilastro.

Se la matrice di rigidezza è assemblata con una accuratezza di 15 digitali, quando i due coefficienti sono sommati insieme il coefficiente di rigidezza del pilastro viene completamenti perso. La stessa cosa succede anche per altri coefficienti della stessa matrice.

Questo fa in modo che la matrice di rigidezza risulti mal condizionata e, quando le equazioni dell'equilibrio sono risolte, il risultato sarà del tutto privo di significato.

Se dopo l'analisi viene eseguito un controllo dell'equilibrio, l'errore sarà immediatamente evidente perché sarà possibile rilevare forti sbilanciamenti.

GRAZIE PER L'ATTENZIONE

Pordenone,
15-16 Giugno 2012

associazione ingegneri e architetti
della provincia di pordenone
piazzetta Ado Furlan 2|8
33170 pordenone
t. 0434 550250 | f. 0434 551229
associazione@ordineingegneri.pn.it

In collaborazione con:

CSi Italia s.r.l
Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
Fax 0434 28466
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

Tecniche per una corretta modellazione strutturale agli elementi finiti

Relatori:
Ing. Massimo Brunetta (CSi Italia)
Ing. Leonardo Bandini (CSi Italia)
Ing. Andrea Bidoli (CSi Italia)

INTRODUZIONE AL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

Definizioni:
Si schematizza il continuo con un “aggregato” discreto di elementi finiti.

Le variabili dei modelli strutturali sono definite solo in punti discreti*: “punti nodali”.*

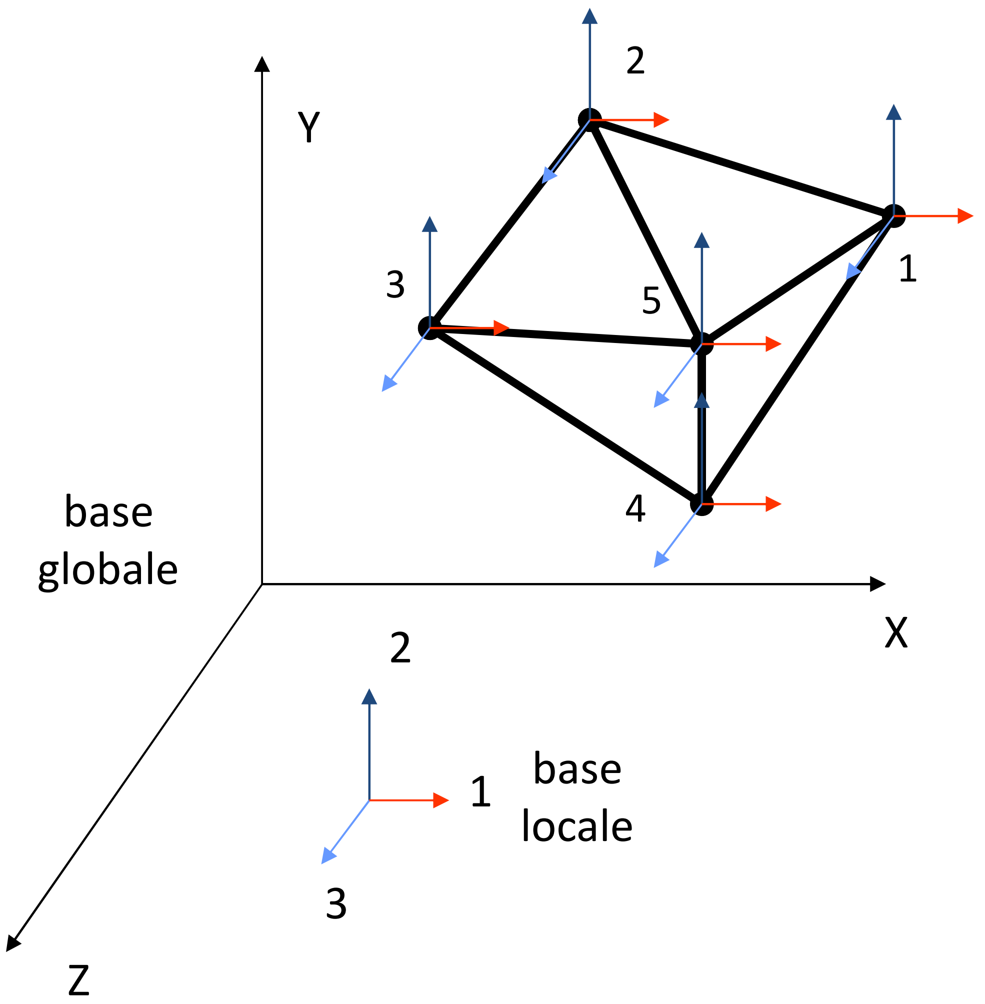
Le strutture sono un insieme arbitrariamente composto di elementi, ognuno dei quali è modellabile come un continuo.

La determinazione del numero dei nodi dipende dal tipo di struttura e dal tipo dei carichi. Tutte le grandezze sono riferite solo nei nodi.

Per definire la posizione dei punti nodali nello spazio si usa una “*base globale”.*

Storia:
Il termine «Fine Element Method» è stato coniato per la prima volta dal Prof. Ray Clough, Berkeley CA nel 1960 come alternativa al metodo delle «differenze finite». Prima si era tentato un metodo in termini di «forma chiusa»

INTRODUZIONE AL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI



- Struttura rappresentata da elementi discreti

- Gli elementi discreti hanno i nodi in comune

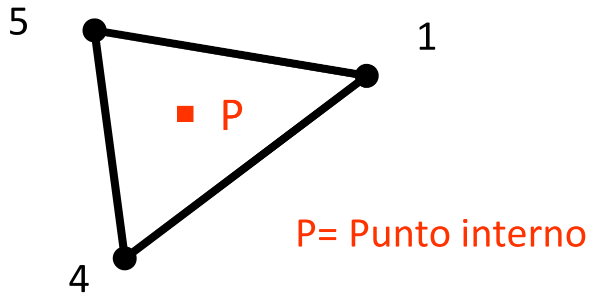
- I nodi sono fissati in un sistema di riferimento globale

Italia s.r.l
Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

INTRODUZIONE AL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

Nella struttura discreta le variabili spostamento sono esclusivamente quelle riferite ai nodi: *"spostamenti nodali"*

Il campo degli spostamenti (v) interno di ogni elemento è approssimato mediante "interpolazione" dei valori nodali



$$\underline{v}(P) = \mathrm{f}(\underline{v}(1), \underline{v}(4), \underline{v}(5))$$

L'interpolazione avviene mediante funzioni dette *"funzioni di forma"*

Ogni tipo di elemento ha la sua funzione di forma

Variabili esterne (relative a tutta la struttura):

Le variabili ***“spostamenti esterni” (Vi)*** sono date dai cosiddetti gradi di libertà (DOF) *essenziali* dei punti nodali, espressi nel sistema di riferimento globale

Le variabili ***“forze esterne” (Pi)*** saranno quelle energeticamente corrispondenti alle Vi, ovvero, energeticamente congruenti con gli spostamenti dei DOF essenziali

Tutti i Vi e le Pi sono numerate congruentemente, si possono raggruppare in colonne di valori (vettori per la base globale)

$$V = \begin{vmatrix} V_1 \\ \dots \\ V_n \end{vmatrix} \qquad P = \begin{vmatrix} P_1 \\ \dots \\ P_n \end{vmatrix}$$

Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

Variabili interne (per ogni elemento finito e):

Le variabili ***"spostamenti interni" ($v^e i$***) sono i possibili gradi di libertà dell'elemento espressi nel sistema di riferimento locale

Le variabili "***forze interne" ($s^e i$***) saranno quelle energeticamente corrispondenti alle $v^e i$

$$v^e = \begin{vmatrix} v^e{}_1 \\ \dots \\ v^e{}_k \end{vmatrix} \qquad s^e = \begin{vmatrix} s^e{}_1 \\ \dots \\ s^e{}_k \end{vmatrix}$$

•EQUAZIONI DI EQUILIBRIO:

le forze interne ed esterne devo potersi equilibrare, pertanto posso definire una matrice *b* tale che:

$$s = b \cdot P = \begin{vmatrix} s^1 \\ \dots \\ s^l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & & \\ b_{l1} & & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_1 \\ \dots \\ P_n \end{vmatrix}$$

•dimensioni:

n: numero di gradi di libertà essenziali

l: rapporto pxk_i

•La colonna j-esima di b contiene tutte le forze nodali interne corrispondenti allo stato di carico esterno Pj =1, P1…Pn = 0

CSi Italia s.r.l
Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

•EQUAZIONI COSTITUTIVE:

•MATRICE DI RIGIDEZZA (scritta sul sistema di riferimento locale):

Consente, conoscendo le variabili spostamento interne di ogni elemento, di determinare le variabili forza interne all'elemento stesso.

$$s^e = k^e \cdot v^e + \bar{s}^e = \begin{vmatrix} s_1^e \\ \dots \\ s_k^e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{11} & \dots & k_{1k} \\ \dots & & \\ k_{k1} & & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_1^e \\ \dots \\ v_k^e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{s}_1^e \\ \dots \\ \bar{s}_k^e \end{vmatrix}$$

•kij è la forza al nodo i compatibile con lo spostamento unitario del nodo j-esimo

•La matrice k è scritta sul sistema di riferimento locale dell'elemento e-esismo.

Forze dovute ai carichi sugli elementi

•EQUAZIONI DI CONGRUENZA:

le variabili cinematiche interne sono connesse attraverso le equazioni di congruenza con le variabili cinematiche esterne

$$v = a \cdot V = \begin{vmatrix} v^1 \\ \dots \\ v^l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \\ a_{l1} & & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ \dots \\ V_n \end{vmatrix}$$

•dimensioni:

n: numero di gradi di libertà essenziali

l: rapporto pxk_i

•La colonna j-esima di a contiene tutte le variabili nodali interne corrispondenti allo stato di deformazione esterno Vj =1, V1…Vn = 0

CSi Italia s.r.l
Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

INTRODUZIONE AL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

•Le relazioni precedenti erano scritte in un sistema di riferimento locale, per passare a quelle scritte rispetto ad un sistema di riferimento globale occorre utilizzare lo schema di trasformazione completo.

$$P = a^T \cdot s$$ **Equilibrio**

$$s = k \cdot v + \bar{s}$$ **Eq. costitutive**

$$v = a \cdot V$$ **congruenza**

$$P = a^T \cdot k \cdot a \cdot V + a^T \cdot \bar{s} = K \cdot V + a^T \cdot \bar{s}$$

Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

- **Principio dei lavori virtuali**
- **Teorema della dualità**

$$\left| \begin{matrix} b \cdot P = s \\ P = g \cdot s \end{matrix} \right| \longleftrightarrow \left| \begin{matrix} h \cdot v = V \\ P = a \cdot V \end{matrix} \right|$$

- Si definisce uno stato di forze equilibrato e uno stato di deformazioni congruente:

$$\left| \begin{matrix} \delta s = b \cdot \delta P \\ \delta v = a \cdot \delta V \end{matrix} \right| \xrightarrow{PLV} \left| \begin{matrix} \delta P^T \cdot V = \delta s^T \cdot v = \delta P^T \cdot b^T \cdot v \\ \delta V^T \cdot P = \delta v^T \cdot s = \delta V^T \cdot a^T \cdot s \end{matrix} \right| \xrightarrow{arbitrarietà} \left| \begin{matrix} V = b^T \cdot v \Rightarrow h = b^T \\ P = a^T \cdot s \Rightarrow g = a^T \end{matrix} \right|$$

$b^T = a^{-1}$, $a^T = b^{-1}$

INTRODUZIONE AL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

La condizione di equilibrio viene imposta applicando il Principio dei lavori Virtuali all'intera struttura.

1) Si esprimono pertanto il lavoro virtuale interno ed esterno di ogni elemento finito nel sistema locale

2) Si trasformano i contributi locali in contributi globali attraverso una matrice di connessione

3) Si sommano e si eguagliano i contributi globali interni ed esterni dei singoli elementi e si ottiene il sistema risolvente nella forma:

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{V} = \underline{P}$$

Italia s.r.l
Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

$$\underline{\underline{K}}$$

k*ij* è la forza al nodo *i* compatibile con lo spostamento unitario del nodo *j*-esimo

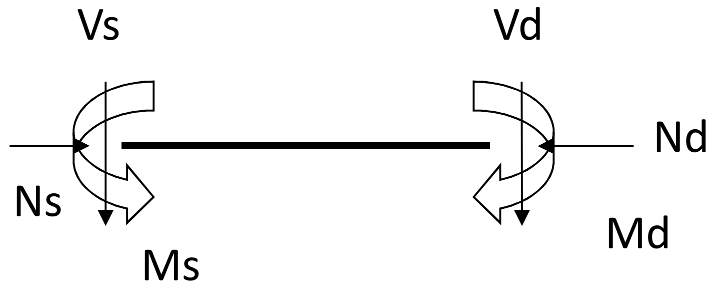
E' la matrice di rigidezza espressa nel sistema di riferimento globale, ed ha le seguenti caratteristiche:

Quadrata (di dimensione n x n)
Simmetrica
Regolare $\det K \neq 0$, quindi invertibile $K = F^{-1}$
Definita positiva

Se la struttura è suscettibile di atti di moto rigido

Singolare $\det K = 0$
Semi definita positiva

Esempio: matrice di rigidezza di un elemento trave alla De Saint Venant



$$\begin{vmatrix} N_s \\ V_s \\ M_s \\ N_d \\ V_d \\ M_d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ & 12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 & 0 & -12EJ/l^3 & 6EJ/l^2 \\ & & 4EJ/l & 0 & -6EJ/l^2 & 2EJ/l \\ & & & EA/l & 0 & 0 \\ & & & & 12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 \\ & & & & & 4EJ/l \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_s \\ w_s \\ \varphi_s \\ u_d \\ w_d \\ \phi_d \end{vmatrix}$$

INTRODUZIONE AL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

Qualunque sia il metodo per la determinazione della matrice delle rigidezze, essa rappresenta una proprietà intrinseca della struttura (del modello).

Ogni matrice di rigidezza degli elementi utilizzati nella discretizzazione, è scritta nel sistema di riferimento locale di ogni elemento, essa va “*tradotta*” in un sistema di riferimento globale.

Ogni matrice di rigidezza degli elementi utilizzati, una volta tradotta nel sistema di riferimento globale, occuperà una precisa posizione all’interno della matrice della struttura <u>assemblata</u>.

INTRODUZIONE AL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

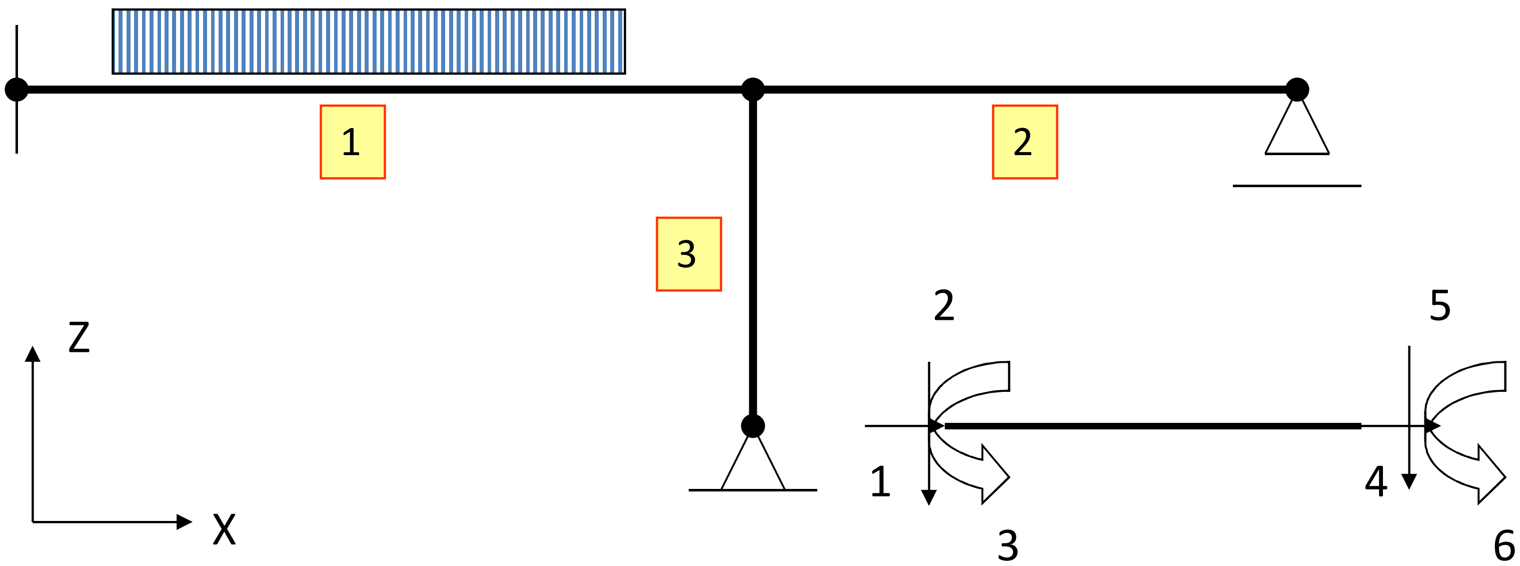
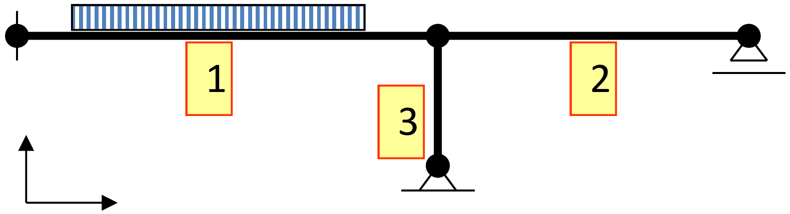


Tabella delle incidenze:

Vi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ELEMENTO 1	1	2	3	4	5	6						
ELEMENTO 2				1	2	3	4	5	6			
ELEMENTO 3				1	2	3				4	5	6

Matrice elemento 1: scritta nel sistema di rif. globale



	1	2	3	4	5	6
1	#	0	0	#	0	0
2	0	#	#	0	#	#
3	0	#	#	0	#	#
4	#	0	0	#	0	0
5	0	#	#	0	#	#
6	0	#	#	0	#	#

Assemblaggio Matrice di Rigidezza

passo 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												

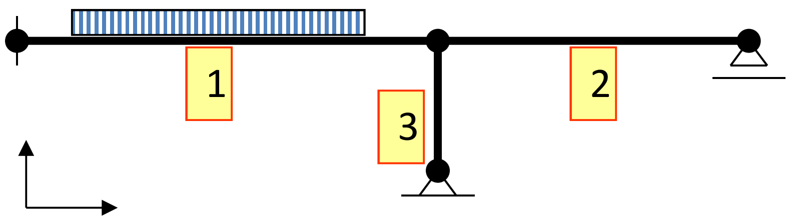
Le matrici locali vengono “tradotte” nel sistema di riferimento globale, mediante rotazione.

$$K = a_g^T \cdot k_g \cdot a_g$$

CSi Italia s.r.l
Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

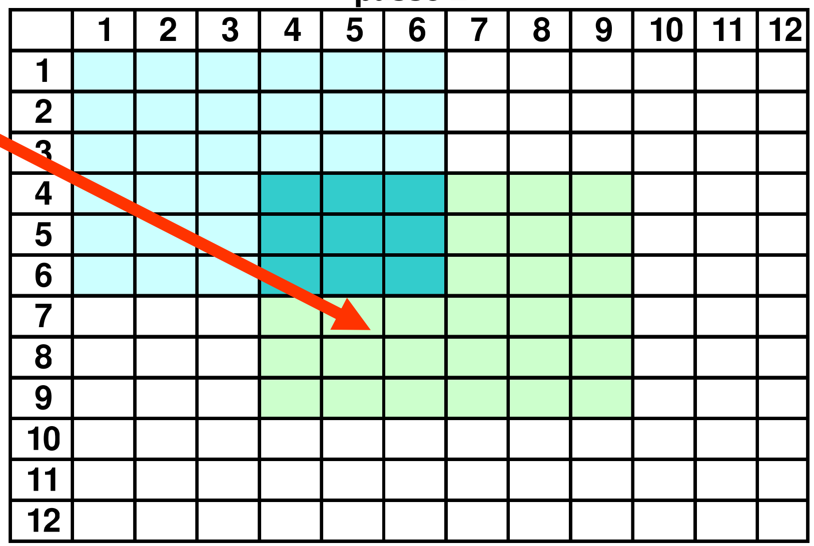
Matrice elemento 2: scritta nel sistema di rif. globale

	1	2	3	4	5	6
1	#	0	0	#	0	0
2	0	#	#	0	#	#
3	0	#	#	0	#	#
4	#	0	0	#	0	0
5	0	#	#	0	#	#
6	0	#	#	0	#	#



Assemblaggio Matrice di Rigidezza

passo 2

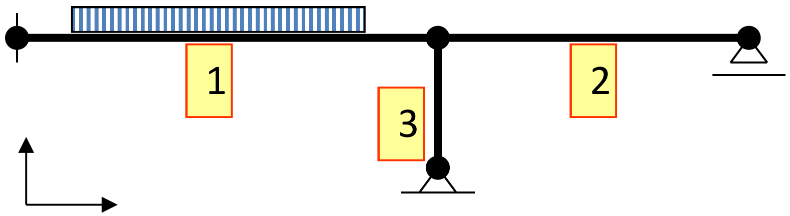


Le matrici locali vengono "tradotte" nel sistema di riferimento globale, mediante rotazione.

$$K = a_g^T \cdot k_g \cdot a_g$$

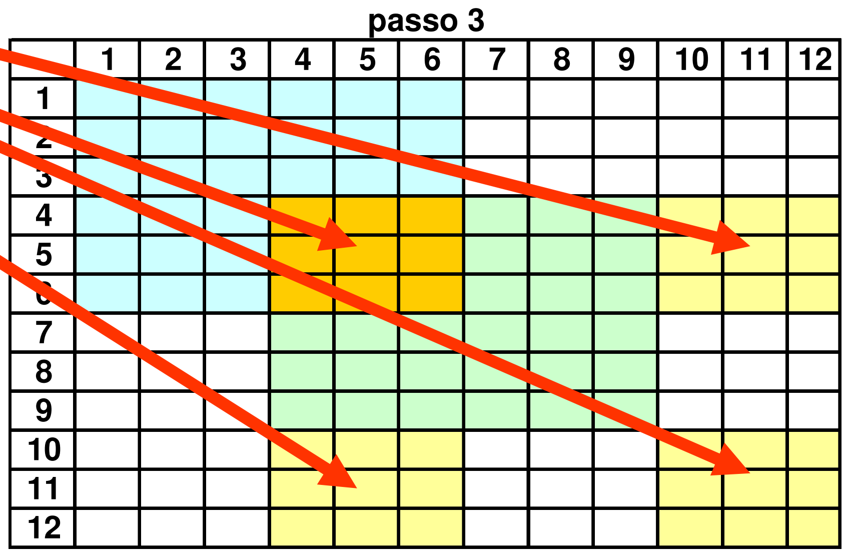
CSi Italia s.r.l
Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

Matrice elemento 3: scritta nel sistema di rif. globale



	1	2	3	4	5	6
1	#	0	0	#	0	0
2	0	#	#	0	#	#
3	0	#	#	0	#	#
4	#	0	0	#	[illegible]	0
5	0	#	#	0	#	#
6	0	#	#	0	#	#

Assemblaggio Matrice di Rigidezza



Le matrici locali vengono “tradotte” nel sistema di riferimento globale, mediante rotazione.

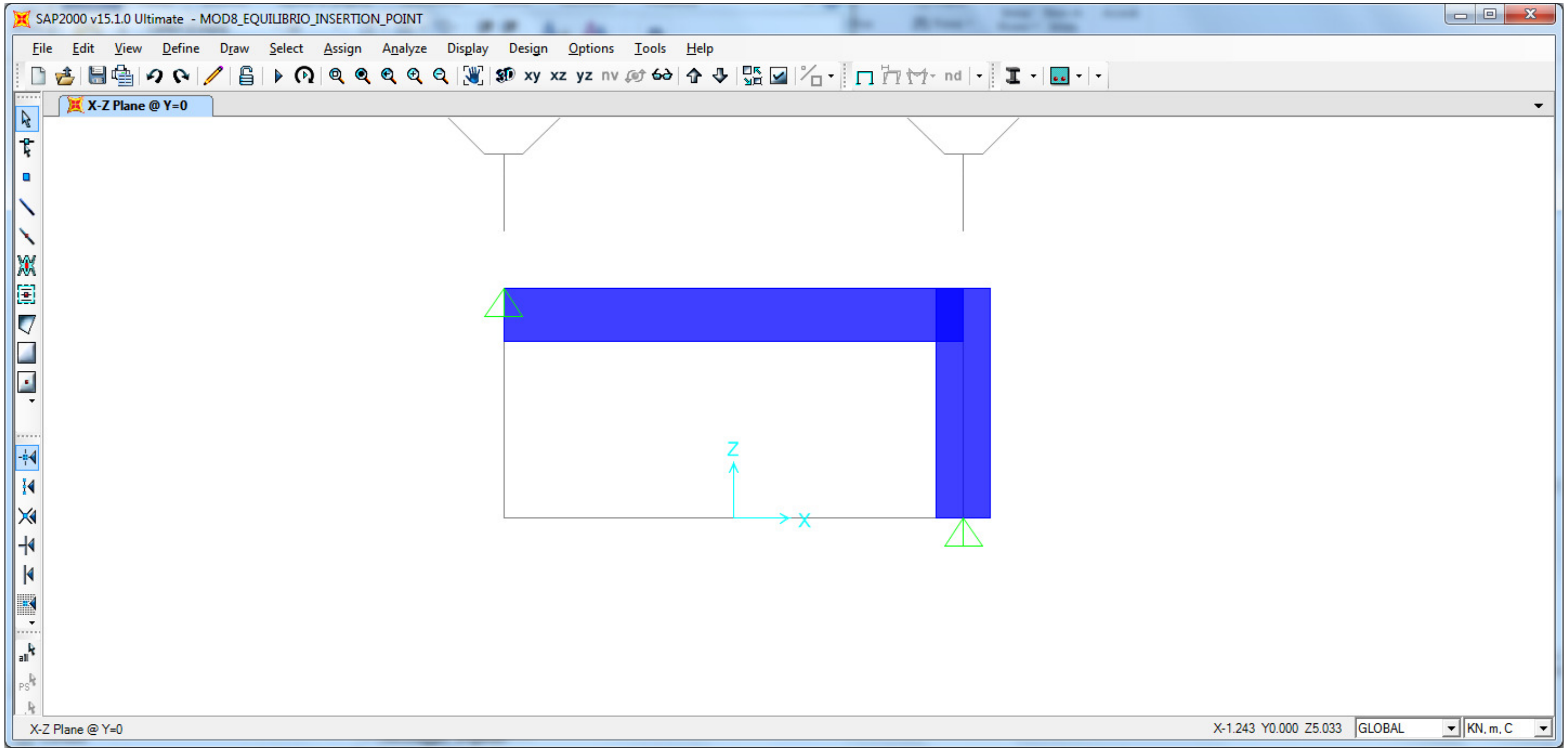
$$K = a_g^T \cdot k_g \cdot a_g$$

Italia s.r.l
Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

CONCETTI CHIAVE ED ESEMPI

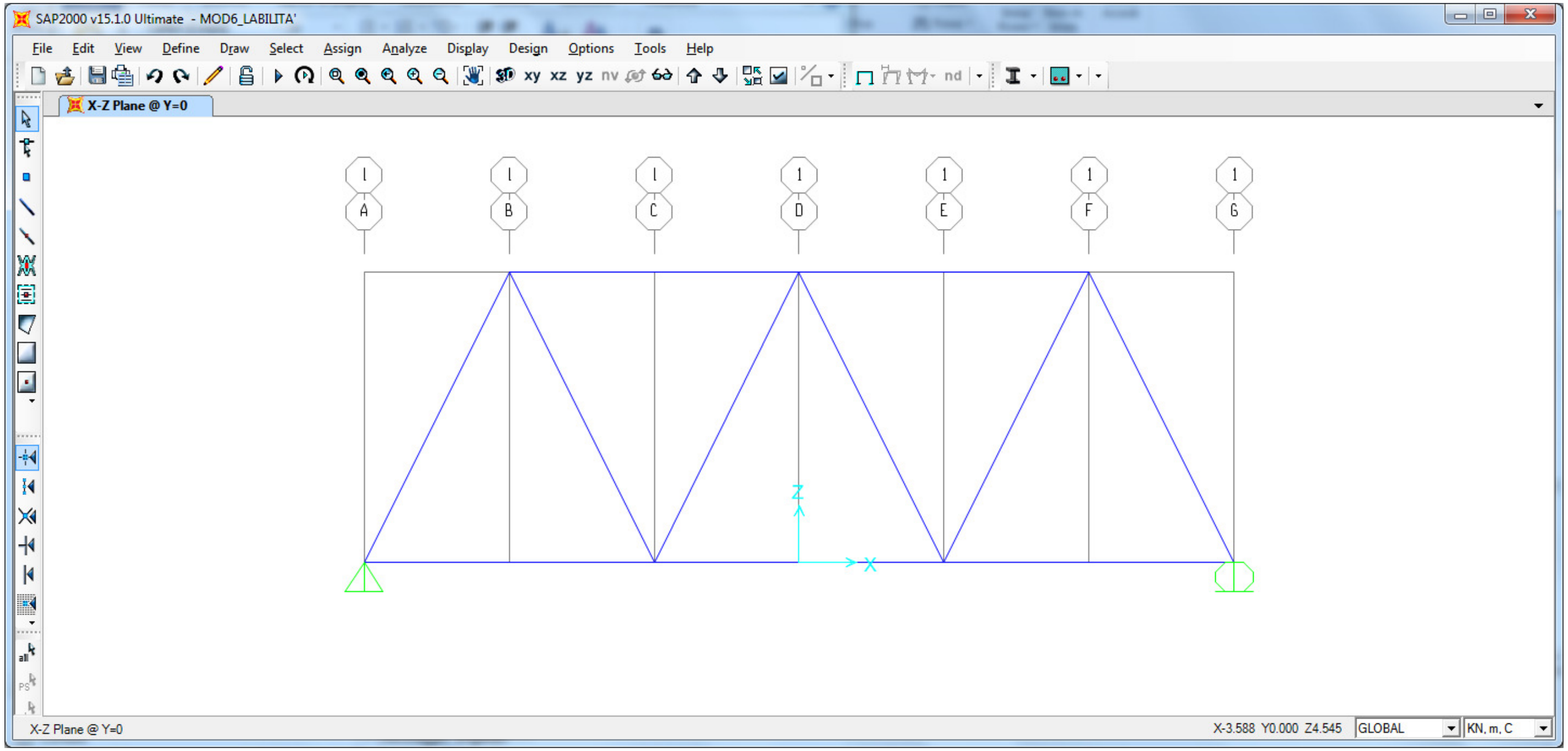
INTRODUZIONE AL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

Esempio 1: inserimento di un offset agli elementi



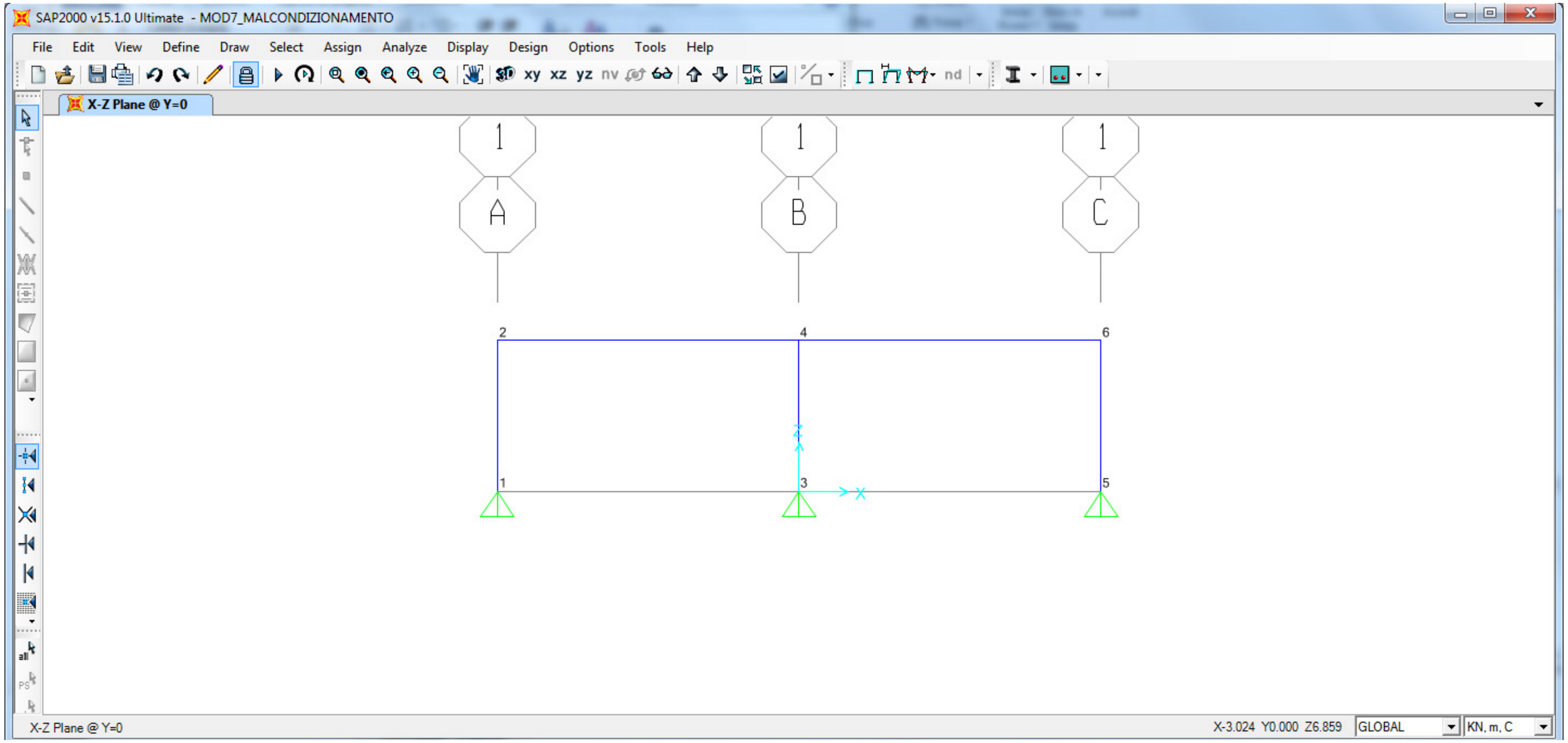
Italia s.r.l
Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

Esempio 2: labilità interna



INTRODUZIONE AL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

Esempio 3: mal condizionamento della matrice di rigidezza



VINCOLI INTERNI ED ESTERNI

Tipologie di vincolo sulla struttura

1) Vincoli esterni: fissano il valore di uno spostamento nodale

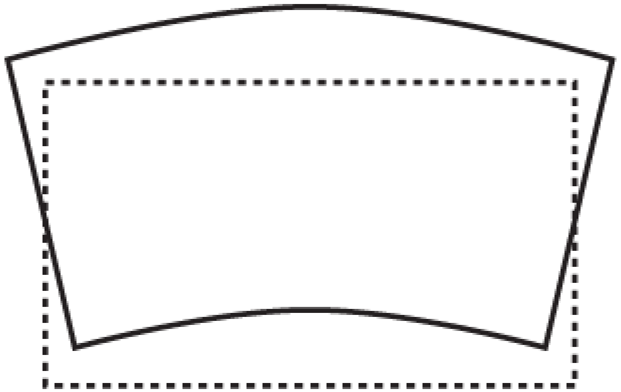
2) Vincoli interni: introducono una dipendenza fra vari spostamenti nodali

   Esempi:

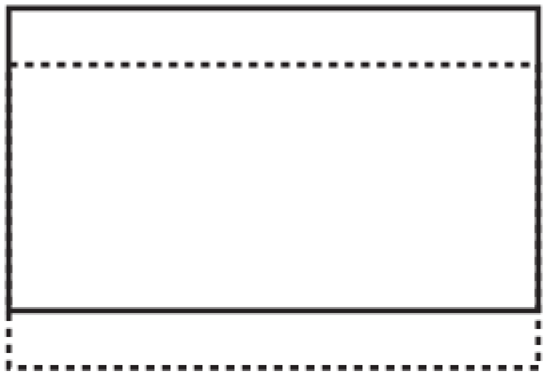
   - Diaframma
   - Corpo rigido
   - Vincolo di bordo (Edge Constraint)
   - …

VINCOLI INTERNI ED ESTERNI

Diaframma FLESSIBILE

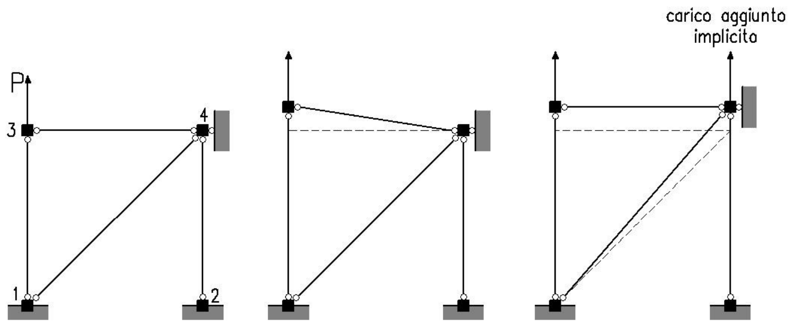


Diaframma RIGIDO

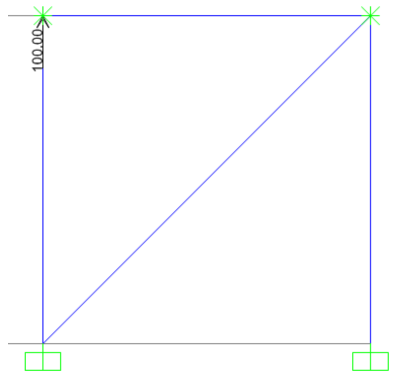


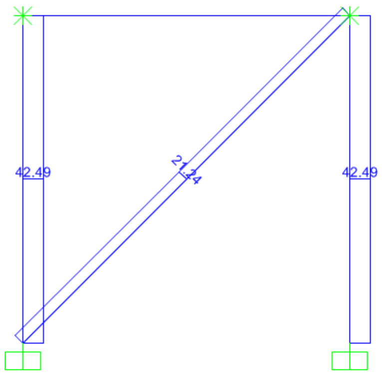
CSi Italia s.r.l
Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

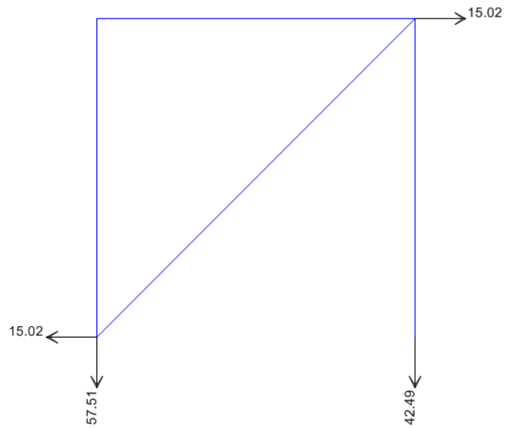
VINCOLI INTERNI ED ESTERNI



(a) reticolare b) deformata (c) deformata con vincolo







Errata applicazione del concetto di equilibrio:

Mforzaapplicata=100x4=400 kNm;
Mrisultanti=15.02x4-57.51x4=-169.96 kNm

Mforzaapplicata+Mrisultanti <> 0

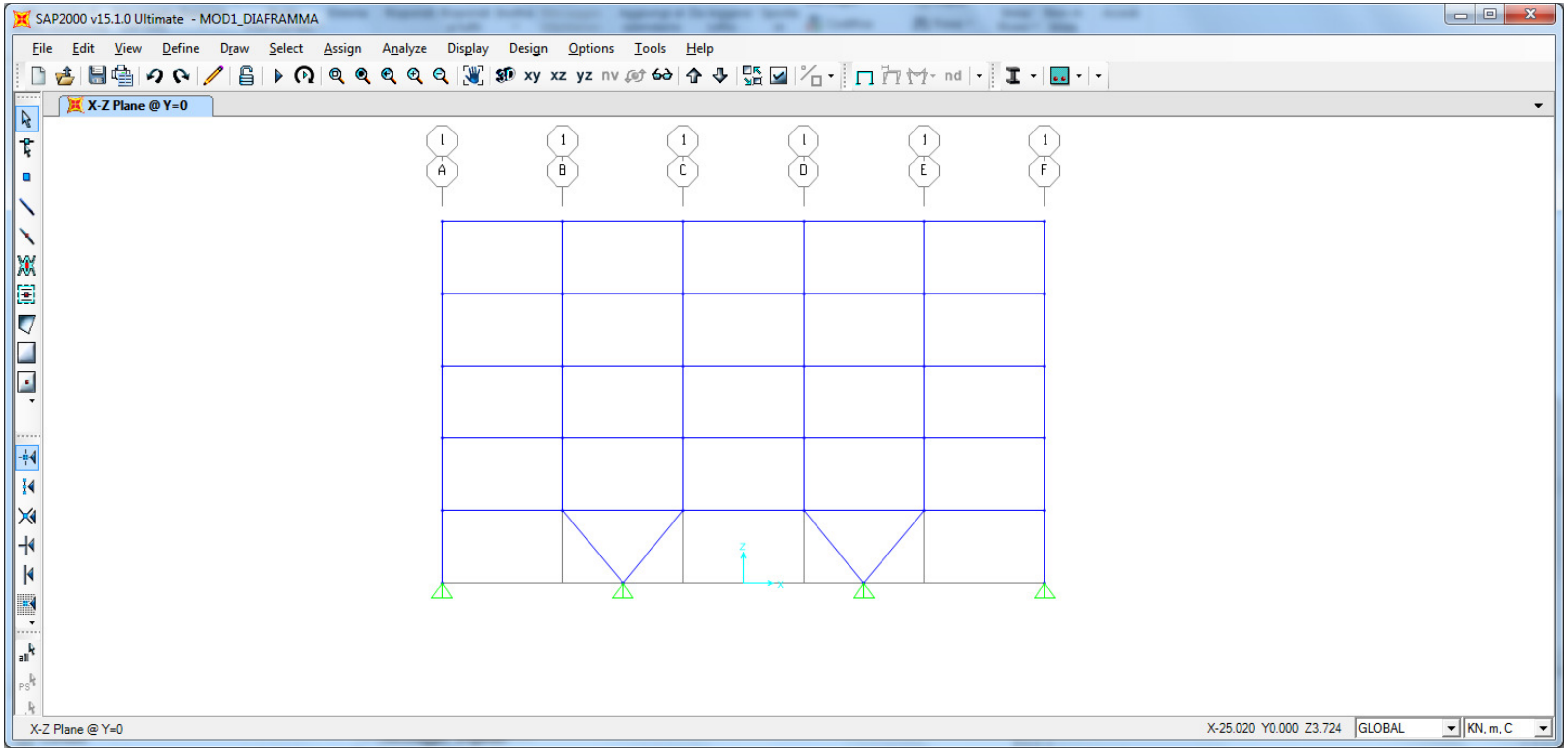
Corretta applicazione del concetto di equilibrio:

Mforzaapplicata=42.49x4=169.96 kNm;
Mrisultanti=15.02x4-57.51x4=-169.96 kNm

Mforzaapplicata+Mrisultanti = 0

VINCOLI INTERNI ED ESTERNI

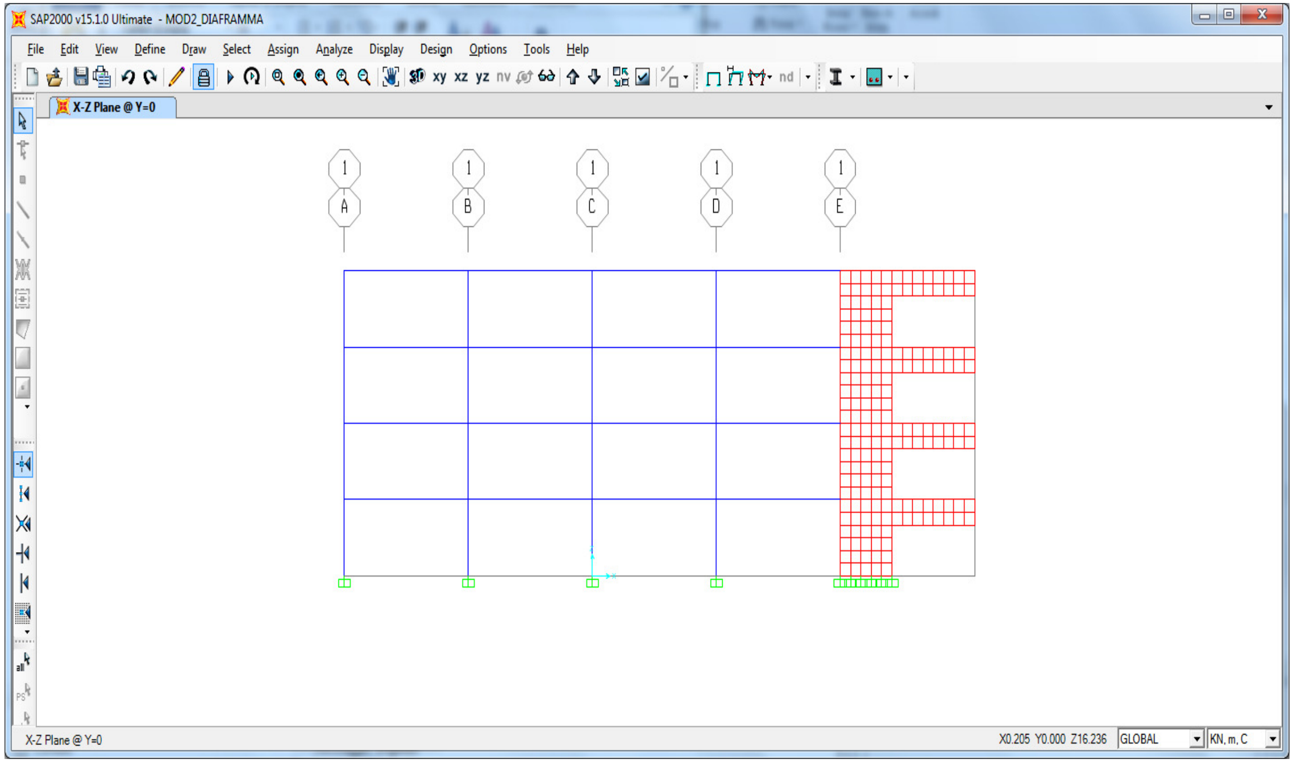
Esempio 4: vincolo di diaframma



Italia s.r.l
Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

VINCOLI INTERNI ED ESTERNI

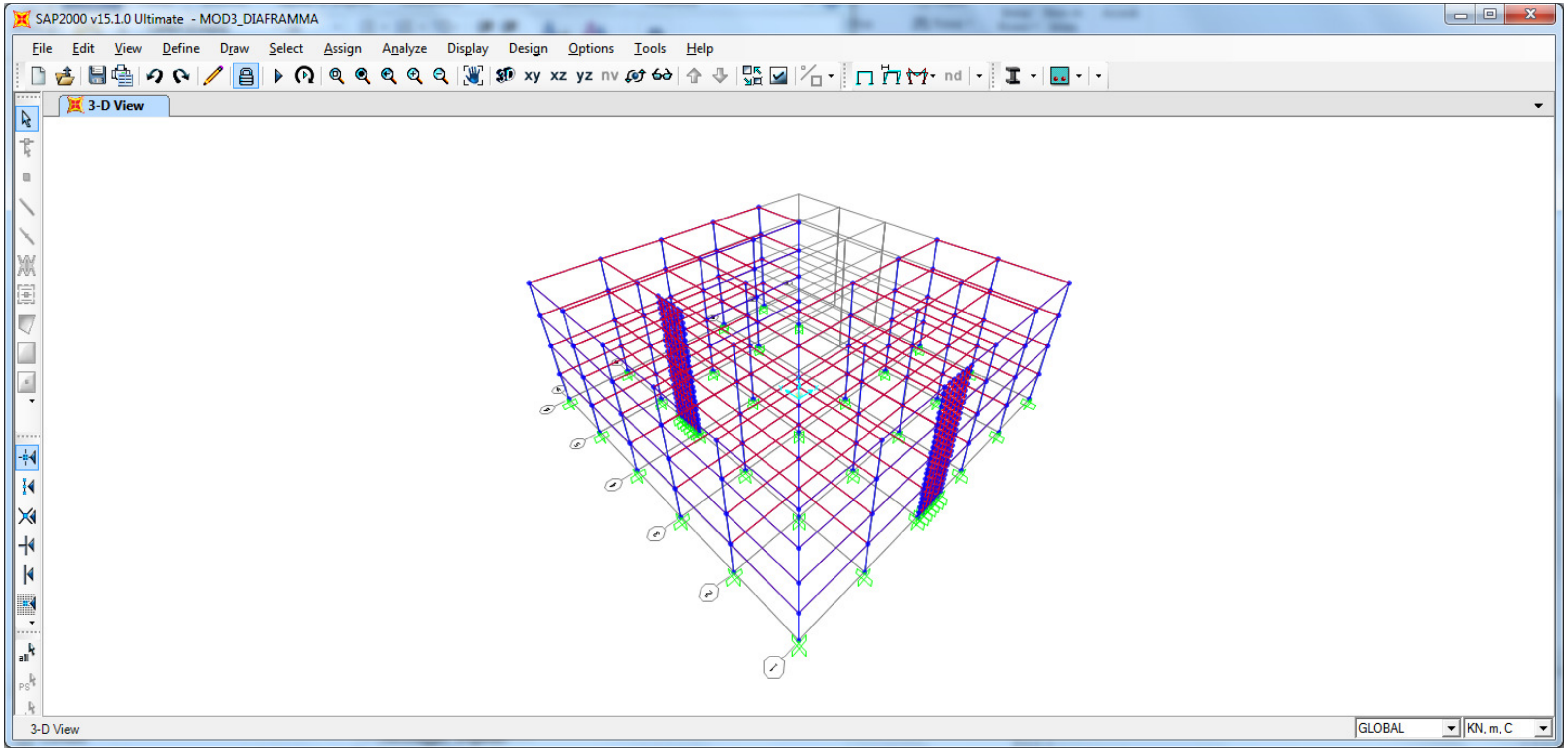
Esempio 5: vincolo di diaframma



CSi Italia s.r.l
Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

VINCOLI INTERNI ED ESTERNI

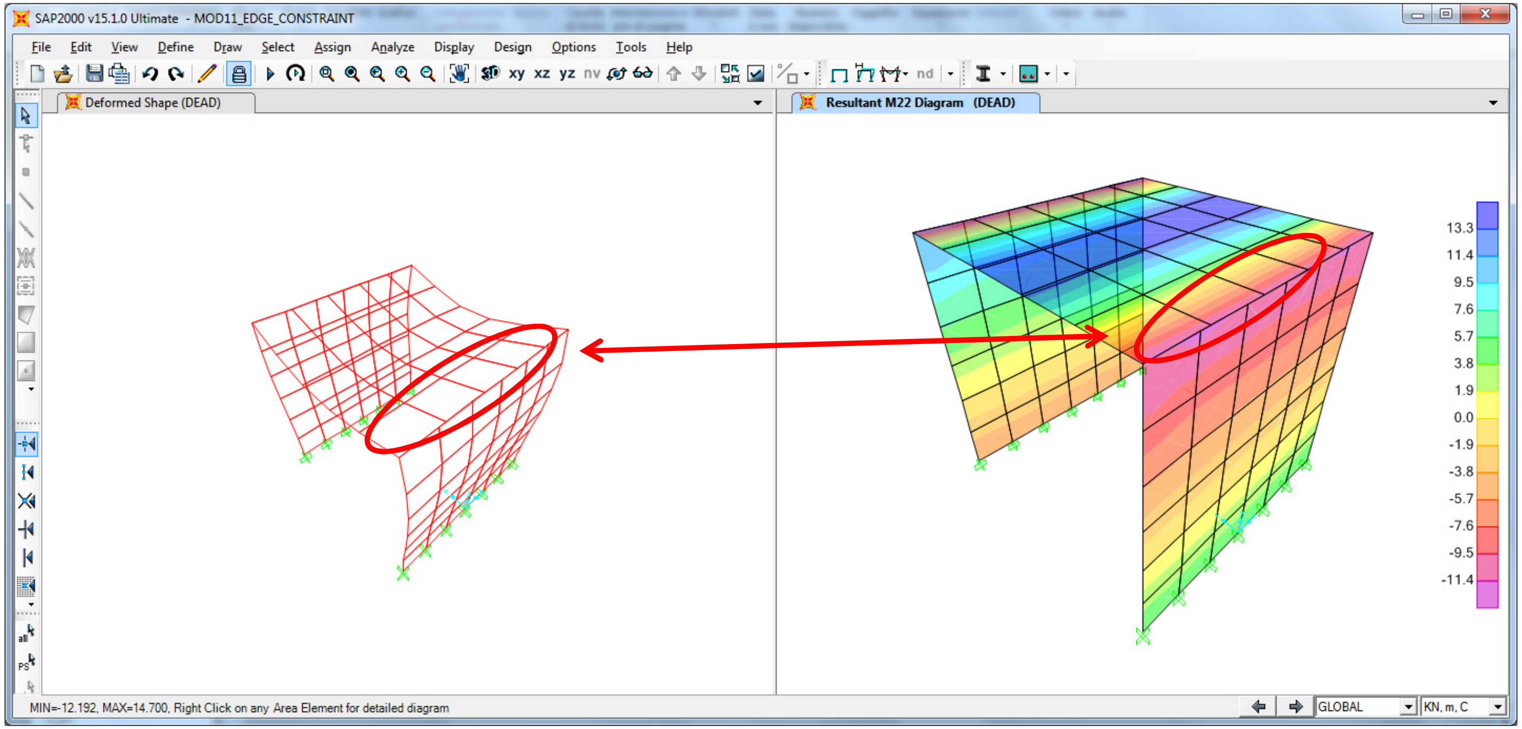
Esempio 6: vincolo di diaframma



CSi Italia s.r.l
Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

VINCOLI INTERNI ED ESTERNI

Esempio 7: vincolo di bordo (Edge Constraint)



DIAFRAMMI DI PIANO RIGIDI E FLESSIBILI

Modellazione dei solai:

non vengono quasi mai inseriti in un modello FEM ma vengono modellati attraverso un vincolo interno di diaframma.

Qualora l'ipotesi di solaio rigido non sia applicabile, la deformabilità dei solai va modellata con elementi membrana e NON con elementi shell per evitare di "sottrarre" carico alle travi.

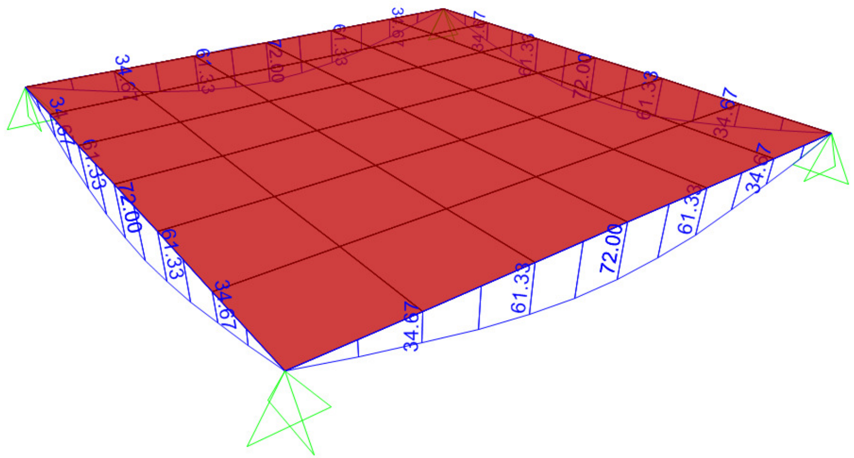
ESEMPIO:

Piastra 6 x 6 metri di spessore 30 cm con travi di bordo 30 x 60 cm caricata con un carico uniforme pari a 8 kN/mq

CSi Italia s.r.l
Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

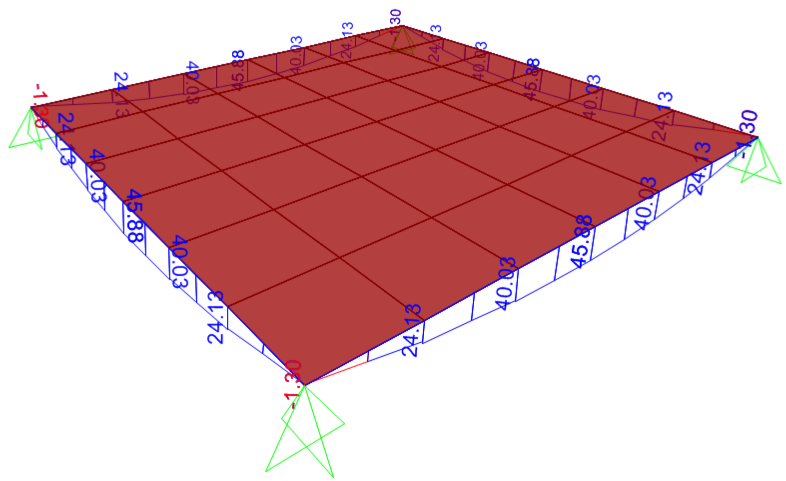
DIAFRAMMI DI PIANO RIGIDI E FLESSIBILI

Esempio 8: membrana vs. shell



Modellazione con membrana:

Momento massimo in campata delle travi pari a 72 kNm



Modellazione con shell:

Momento massimo in campata delle travi pari a 46 kNm

CSi Italia s.r.l
Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

ANALISI MODALE RAGIONATA

<u>Definizione della massa sismica della struttura:</u>

prima di effettuare l'analisi modale occorre aver opportunamente definito la sorgente di massa (mass source) della struttura.

<u>Numero di modi:</u>

non deve essere eccessivo per evitare drastiche riduzioni delle azioni sulla struttura dovuti ai metodi di combinazione degli effetti di tipo quadratico (SRSS, CQC, ecc)

Caso 1:

1° Modo: 60% di massa e 150 Ton di taglio

2° Modo: 30% di massa e 40 Ton di taglio

3° Modo: 10% di massa e 10 Ton di taglio

Taglio totate con SRSS $\sqrt{150^2 + 40^2 + 10^2} = 156 \ Ton$

ANALISI MODALE RAGIONATA

Caso 2:

1° Modo: 40% di massa e 100 Ton di taglio

2° Modo: 35% di massa e 60 Ton di taglio

3° Modo: 25% di massa e 40 Ton di taglio

Taglio totate con SRSS $\sqrt{100^2 + 60^2 + 40^2} = 123 \ Ton$

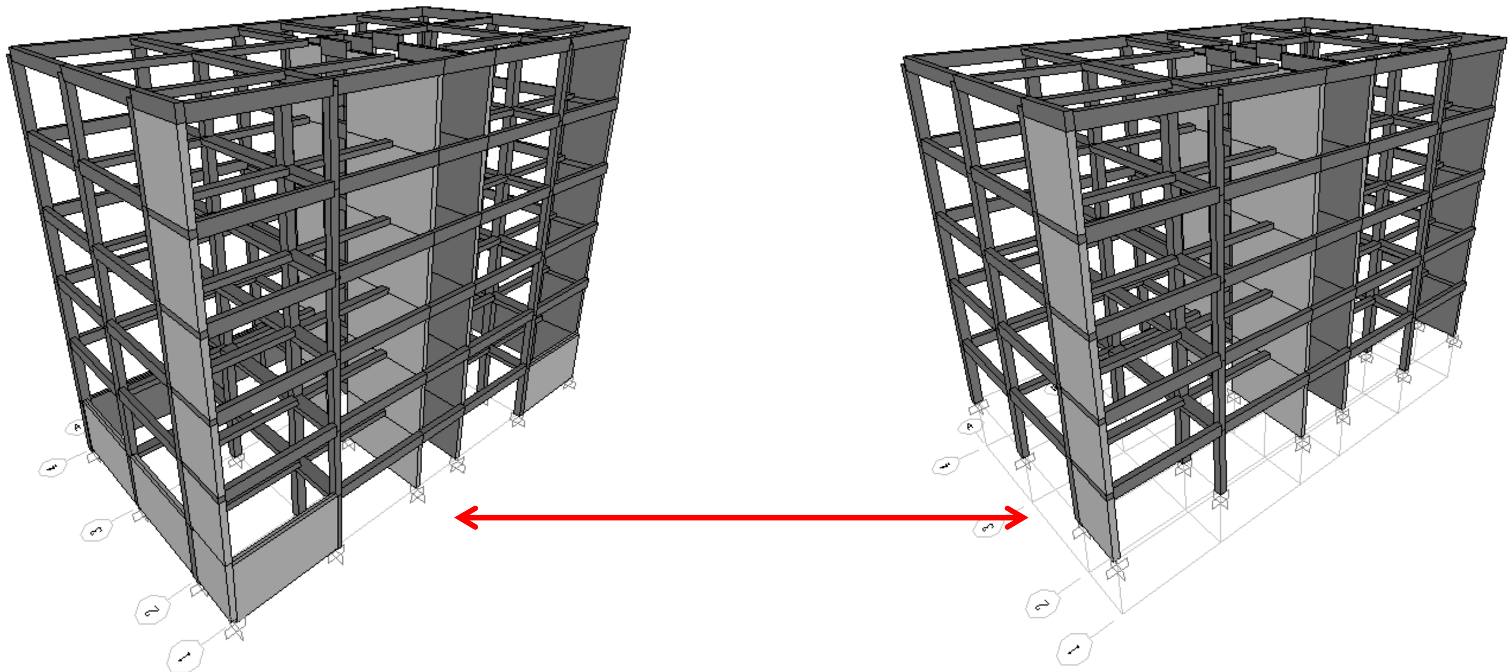
<u>Analisi agli autovettori Vs. Analisi ai vettori di Ritz:</u>

l’analisi ai vettori di Ritz è basata sulla reale distribuzione del carico sulla struttura e permette di ottenere percentuali di massa partecipante con un numero inferiore di modi rispetto all’analisi agli autovettori

ANALISI MODALE RAGIONATA

<u>Strutture con forti variazioni di rigidezza:</u>

occorre prestare particolare attenzione all’analisi di strutture che presentino brusche variazioni di rigidezza in altezza. Risulta sempre buona norma confrontare il risultato dell’analisi dinamica della struttura completa con quello corrispondente alla sovrastruttura flessibile incastrata al piede.



SCALING OF RESULTS (SCALING OF FORCES)

Nella UBC97 al punto 1631.5.4 e successive (ASCE7:2010) viene riportata la seguente prescrizione:

…

Nelle analisi dinamica lineare (analisi spettrale) il taglio alla base deve risultare non inferiore all’80% del taglio calcolato con il metodo della statica equivalente.

…

STRESS AVERAGING

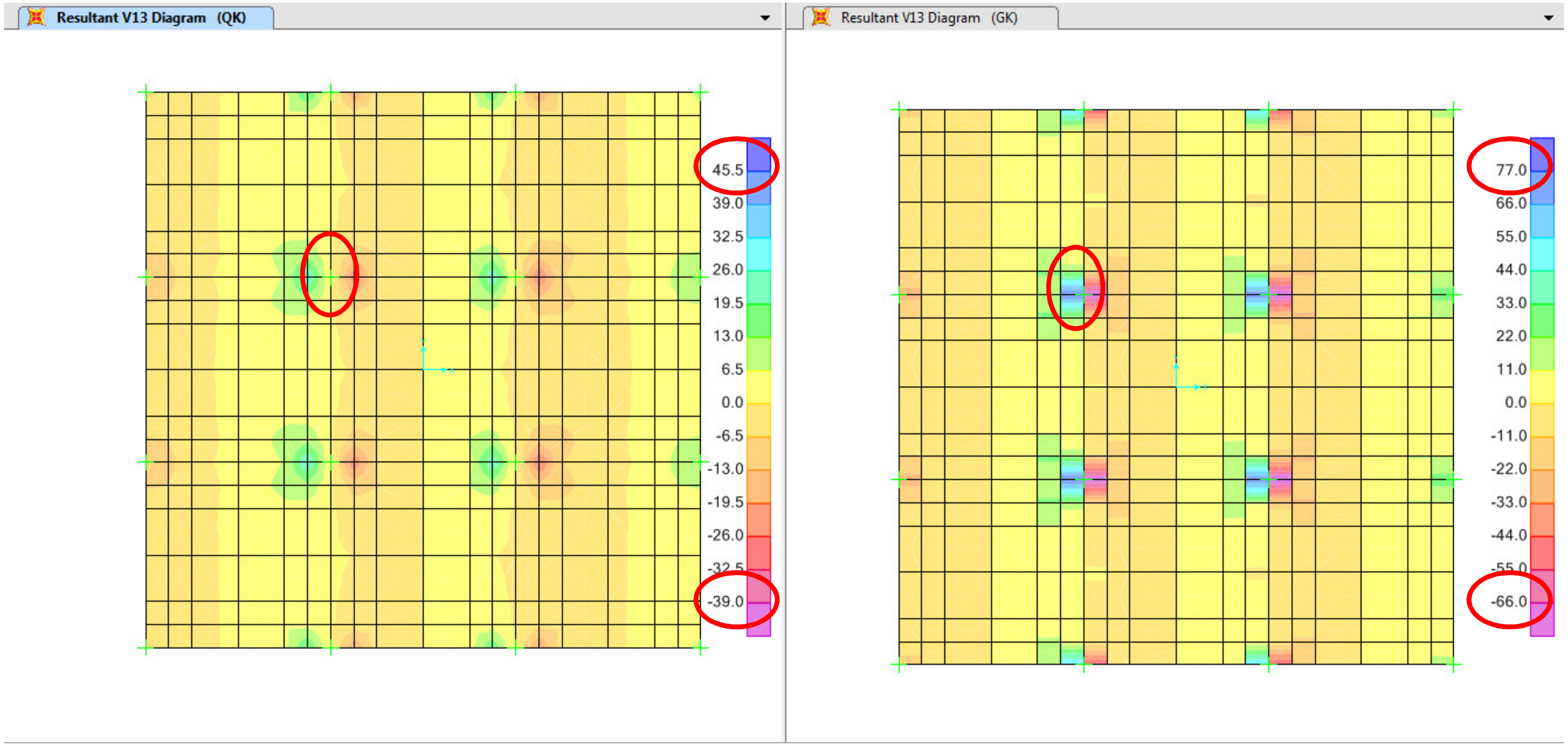
Le procedure numeriche utilizzate nella risoluzione di un problema agli elementi finiti comportano uno squilibrio apparente delle tensioni all’interfaccia fra elementi adiacenti.

Numerosi programmi di calcolo implementano algoritmi di correzione dei risultati basati sulla media del livello tensionale presente nelle interfacce adiacenti in modo da ottenere delle rappresentazioni equilibrate delle componenti di tensione (stress averaging).

Occorre però prestare attenzione e non fare un uso indiscriminato di tali procedure per evitare di incorrere in grossolani errori: effettuare lo stress averaging in corrispondenza di carichi puntuali, dove vi è un brusco cambio di segno della sollecitazione, porta ad un livellamento fittizio delle azioni.

STRESS AVERAGING

Esempio 9: confronto fra le forze di taglio in una soletta con e senza stress averaging



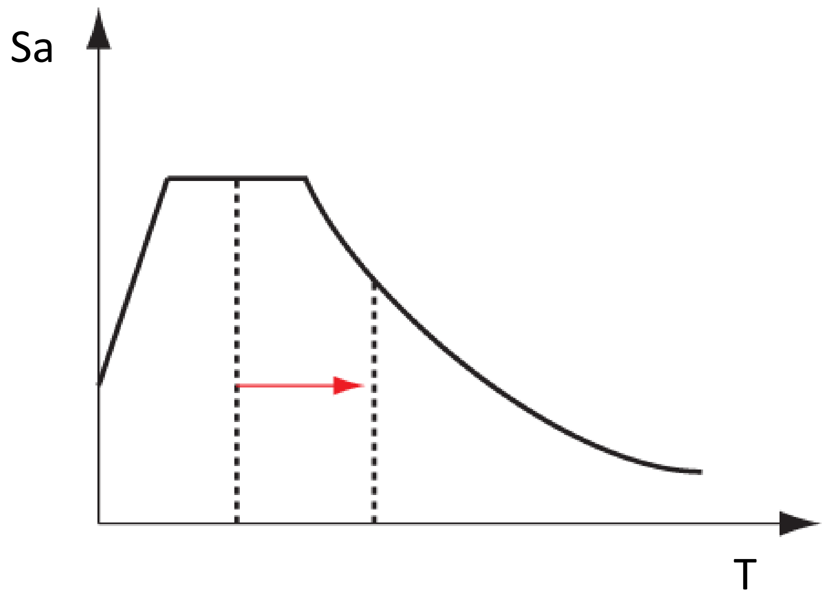
Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

INTERAZIONE TERRENO-STRUTTURA

L'interazione terreno struttura rappresenta un argomento molto complesso e difficilmente riconducibile a schemi semplificati.

Tuttavia esistono delle regole base che consentono di ottenere dei risultati cautelativi nella maggioranza dei casi pratici:

1) Nelle analisi sismiche di tipo dinamico, la struttura di fondazione NON deve essere basata su un modello di Winkler con coefficiente di sottofondo statico.

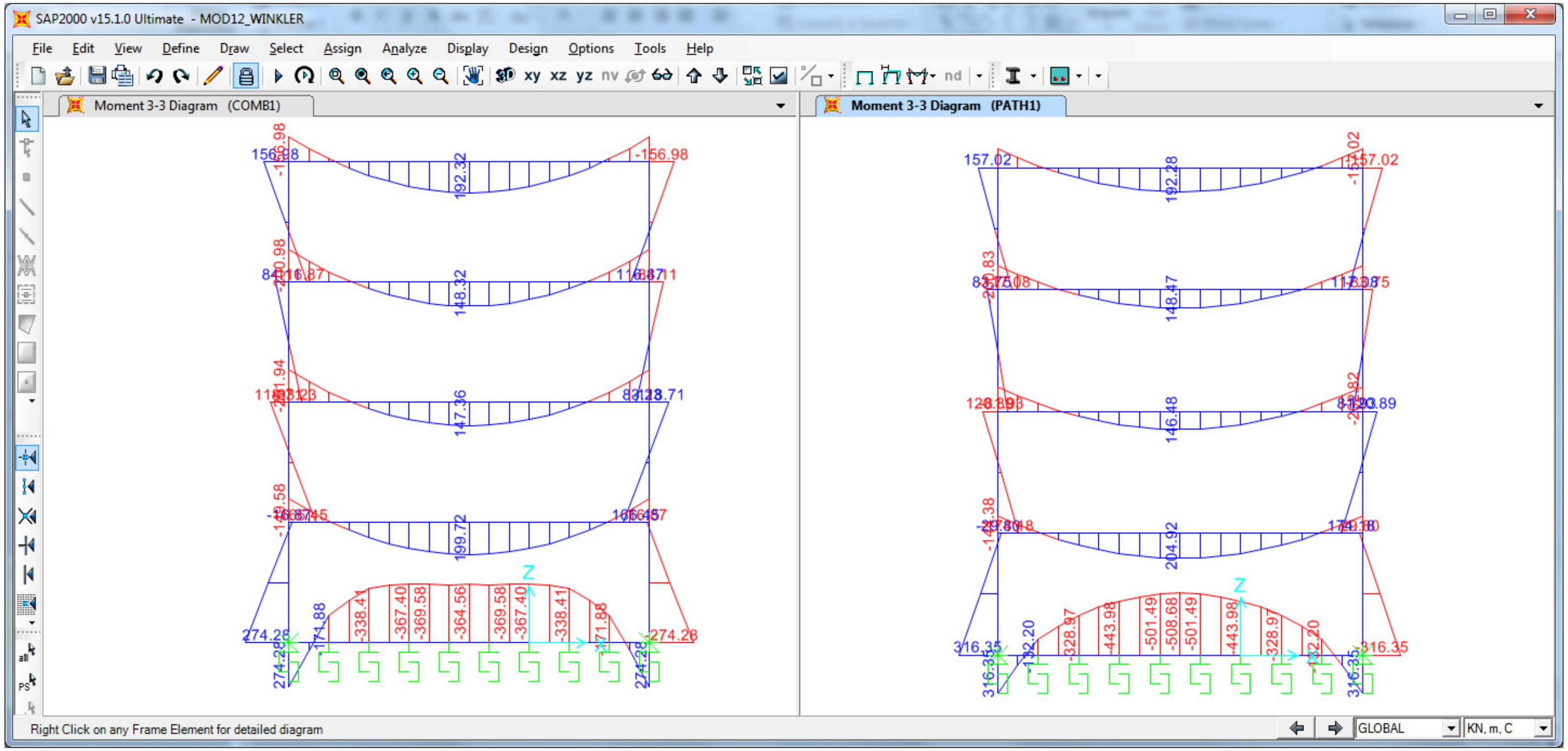


Un tale approccio comporterebbe, normalmente, un incremento del periodo strutturale ed una conseguente diminuzione dell'azione sismica applicata

INTERAZIONE TERRENO-STRUTTURA

2) In presenza di forti spinte (azioni sismiche, sovrapressioni di falda ecc), che possono indurre azioni di trazione nel terreno, occorre tener conto della non linearità di comportamento attraverso l'utilizzo di elementi reagenti solo a compressione.

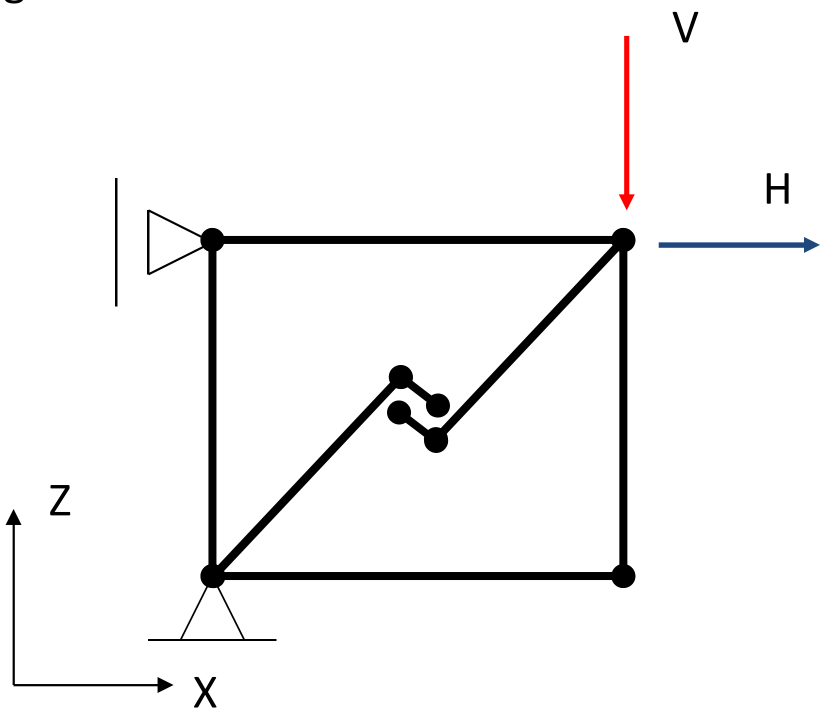
Esempio 10: molle reagenti solo a compressione



CSi Italia s.r.l
Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

Esempio 11: Analisi lineari e non lineari, applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti



Per effetto della non linearità dell’asta centrale, data dall’assenza di resistenza a compressione (tension only) ai fini del risultato finale l’equilibrio è diverso nei tre casi:

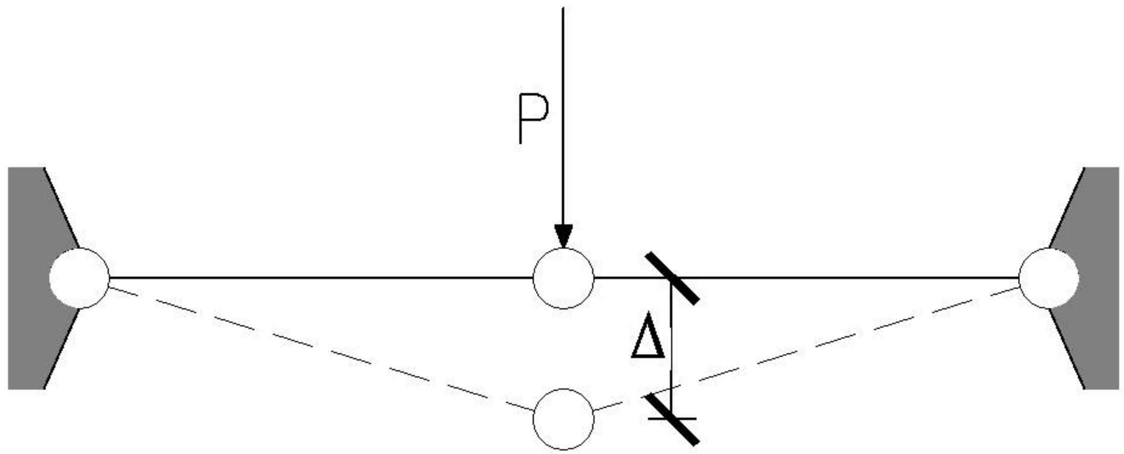
1. Applicazione indipendente di H e V e successiva sovrapposizione degli effetti.
2. Applicazione di V e successiva applicazione di H.
3. Applicazione di H e successiva applicazione di V.

Non valendo il principio di sovrapposizione degli effetti si introducono i c.d. «percorsi» di carico

CSi Italia s.r.l
Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu

NON LINEARITA' GEOMETRICA

Esempio 12: non linearità geometrica



ULTERIORI APPROFONDIMENTI

- Carichi associati a forze stabilizzanti
- Non linearità di materiale
- Analisi di buckling su frame e shell (instabilità globali e locali)
- Analisi dinamiche nel dominio del tempo
- Analisi dinamiche nel dominio delle frequenze

Galleria San Marco 4
33170 Pordenone
Tel. 0434 28465
E-mail info@csi-italia.eu
http://www.csi-italia.eu